



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

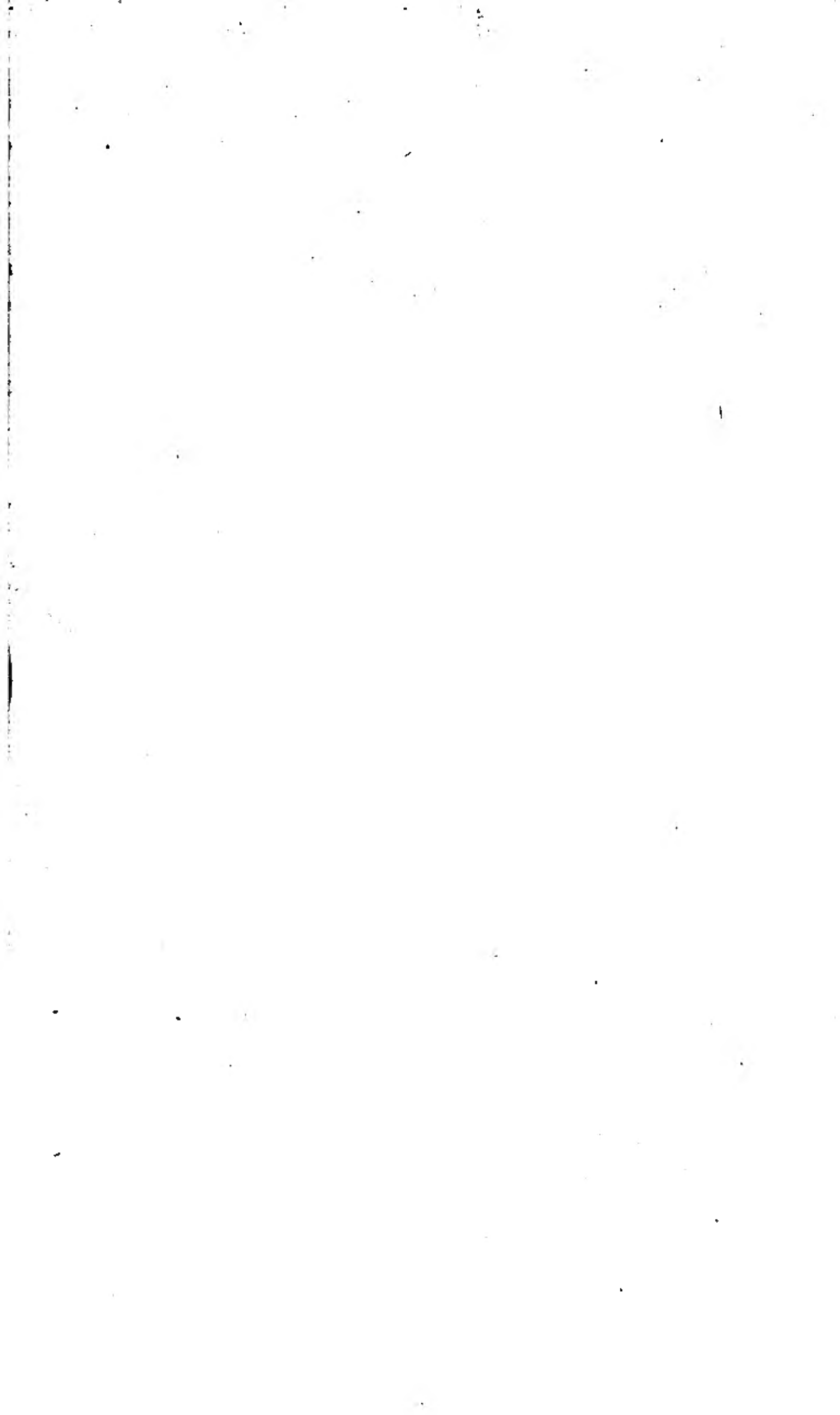
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

The Gift of
WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.
A.B. 1878 A.M. 1879
Teacher of Mathematics
1898 to 1922
Assistant Dean, College of Engineering
1908 to 1922
Professor Emeritus
1922



QA
37
B57
1798a

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME PARTIE.

C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. ^{Étienne} BÉZOUT, de l'Académie des Sciences, Examineur
des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves
& des Aspirans au Corps de l'Artillerie, & Censeur
de Livres.

TROISIÈME PARTIE,
*Contenant l'ALGÈBRE & l'application de cette science
à l'Arithmétique & à la Géométrie.*

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.



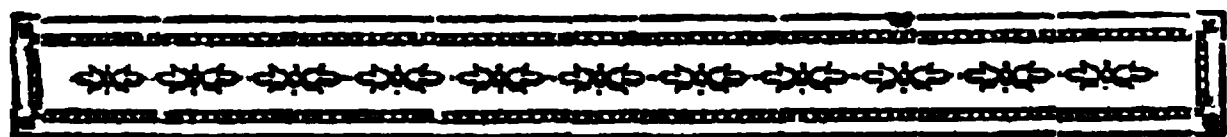
A P A R I S ,

Chez { RICHARD, Libraire, rue Haute - Feuille , N°. 11 , au
coin de la rue Serpente.
CAILLE, Libraire , rue Serpente , N°. 7.

1798 , v. ft. AN VI.

un 14. suite
F. 2. 3
12-4-39

v



P R É F A C E.

LES connoissances que nous avons exposées dans les deux volumes précédens, servent de base à toutes les parties des Mathématiques ; & la méthode que nous avons suivie pour les présenter , peut servir à passer à des vérités plus composées. Mais en réfléchissant sur cette méthode , on a pu remarquer que le nombre des propositions qu'on est obligé de se rappeler pour l'intelligence d'une proposition nouvelle , s'accroît à mesure que celle-ci s'éloigne de l'origine de la chaîne qui les lie les unes aux autres.

Cette manière de procéder à la démonstration ou à la recherche des vérités mathématiques , est sans doute lumineuse ; mais elle devient de plus en plus pénible , à mesure que ces vérités s'éloignent davantage des connoissances primitives : elle a d'ailleurs l'inconvénient d'exiger de la part de l'esprit , de nouvelles ressources , de nouveaux expédiens , à mesure qu'on passe à de nouveaux objets.

Cependant , quelque différens que soient les objets des recherches mathématiques , les raisonnemens & les opérations qu'ils exigent , ont des parties communes qu'on peut ramener à des règles générales , à l'aide desquelles on peut soulager l'esprit d'une grande

partie des efforts que chaque nouvelle question sembleroit exiger. La méthode qu'on appelle *Analyse*, est celle qui enseigne à trouver ces règles, & l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle l'*Algèbre*.

L'Algèbre, ou l'art de représenter par des signes généraux toutes les idées qu'on peut se former relativement aux quantités, est à proprement parler, une langue en laquelle nous traduisons d'abord certaines idées connues; puis par des règles constantes, nous combinons ces idées à l'aide des caractères de cette langue; & enfin, interprétant les résultats de ces combinaisons, nous en concluons des vérités que toute autre manière de procéder auroit rendues d'un accès très-difficile, & auxquelles même il seroit souvent impossible d'atteindre par une autre voie.

Les avantages principaux qu'on peut retirer de cette science, sont donc de se faciliter l'intelligence & la découverte des vérités mathématiques, & de se procurer des moyens faciles & des règles générales pour résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Les Méthodes de l'Algèbre ne nous étoient point nécessaires dans les volumes précédens, où les objets étoient simples; mais la synthèse que nous y avons employée, ne peut nous procurer les mêmes facilités pour traiter ceux qui nous restent à parcourir. D'ailleurs une des choses qu'on doit avoir en vue

dans l'étude des Mathématiques , c'est moins d'accumuler un grand nombre de propositions , que d'acquérir l'esprit de recherche & d'invention , qui seul peut faire mettre à profit les connoissances que l'on a acquises ; or la manière de procéder en Algèbre , tend directement à ce but.

L'objet principal que nous nous proposons , en donnant l'Algèbre dans ce volume-ci , est de nous mettre en état de traiter , dans le suivant , la Mécanique , d'une manière facile & utile. Mais pour tirer de l'Algèbre les avantages qu'elle peut procurer , il faut s'être rendu familier l'usage des différentes opérations qu'elle enseigne , & s'être accoutumé à interpréter les phrases de cette langue ; c'est pour cette raison , que nous avons renfermé dans ce même volume , plusieurs applications de l'Algèbre à l'Arithmétique & à la Géométrie. Nous nous étions proposé d'y faire entrer encore une autre branche de l'Analyse , celle qui regarde les quantités considérées comme variables , ou du moins d'en donner ce qui nous seroit nécessaire pour quelques applications utiles à la Mécanique ; mais une espèce de nécessité de conserver à cette troisième partie le même caractère d'impression , qu'aux deux premières , ne nous permet pas d'exécuter ce projet pour le moment , sans passer de justes bornes.

Les différentes méthodes qu'on a suivies jusqu'ici ,

pour exposer les principes de l'Algèbre, se réduisent à deux principales. La première consiste à donner les règles des quatre opérations fondamentales, & celles qui conduisent à la résolution des équations du premier degré, par une voie qu'on peut regarder comme synthétique. La seconde, qui est purement analytique, conduit à trouver ces règles, en proposant des questions dont la résolution exige certaines opérations & certains raisonnemens, que par un examen postérieur, on trouve revenir les mêmes dans toutes les questions, & que par conséquent on érige en règles générales. Cette dernière méthode sembleroit d'abord préférable à la première, en ce qu'elle paroît devoir flatter l'amour-propre des Commencans, & irriter leur curiosité. Mais si l'on fait réflexion, qu'alors l'attention est nécessairement partagée entre trois objets, savoir l'état de la question, les raisonnemens pour l'exprimer algébriquement, & les opérations qu'il faut faire à l'aide de signes dont la signification échappe d'autant plus aisément qu'on est encore moins exercé à représenter ses idées d'une manière abstraite, il me semble qu'on doutera que cette méthode soit la meilleure, dans les commencemens, pour le plus grand nombre de lecteurs. Ne produiroit-elle pas, au contraire, un effet tout opposé à celui que quelques-uns lui attribuent ? Les raisonnemens qu'elle exige, quoique simples dans les commencemens, où

sans doute, on ne traite que des questions simples, ces raisonnemens, dis-je, devant être tirés du fond même de celui qui opère, ne l'humilient-ils pas, lorsqu'ils ne se présenteront pas à lui? La méthode d'invention suppose toujours une certaine finesse; c'est celle qu'ont dû suivre les inventeurs, & par conséquent celle des hommes de génie; or ceux-ci ne sont certainement pas le plus grand nombre.

Ce sont ces considérations qui nous ont déterminé à suivre la première méthode pour l'exposition des règles fondamentales; mais comme un des objets que nous nous proposons, est de faire acquérir au lecteur cette méthode d'invention, nous n'avons suivi la première, que jusqu'où il nous a paru nécessaire de le faire, pour que le défaut d'habitude des signes algébriques, ne fût plus un obstacle à l'intelligence de ce que nous aurions à présenter.

Nous ne dirons rien de la manière dont les choses sont traitées; ce n'est plus à nous à la juger. Mais nous croyons pouvoir nous arrêter un moment sur quelques-unes des matières que nous avons considérées; elles sont de deux sortes: les unes élémentaires; les autres, au moins pour la plus grande partie, supposent qu'on s'est rendu les premières très-familières. Pour les unes & pour les autres, nous avons fait en sorte de ne rien omettre de ce

qui peut être utile. Nous avons distingué celles de la seconde sorte , par de petits caractères : quelques notes répandues dans l'ouvrage , & qui appartiennent à la partie élémentaire ; sont placées au bas des pages , & renvoyées par une étoile. Parmi les objets compris sous le petit caractère , nous avons renfermé , entre autres choses , 1°. le Précis d'une méthode , qu'on trouvera avec plus d'étendue , dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1764 , & qui a pour objet , l'élimination des inconnues dans les équations. C'est une partie de l'Algèbre , sur laquelle il y a encore bien des choses à faire , & qui importe d'autant plus à la perfection de cette science , que la résolution générale des équations en dépend absolument. 2°. Une méthode pour la résolution des équations. Nous ne dirons rien des tentatives qui ont été faites sur cette matière depuis la naissance de l'Analyse. Nous remarquerons seulement que jusqu'à nos jours , on n'a pas passé le quatrième degré ; on n'a pas même eu une méthode uniforme pour les degrés qu'on fait résoudre. On trouve à la vérité , dans l'Analyse démontrée du P. Reyneau , une méthode que l'on y donne comme générale , & qui est due à M. Tschirnaüs , qui la publia dans les Actes de Leipzig ; mais indépendamment des calculs rebutans & superflus auxquels elle entraîne , elle ne réussit pour le quatrième degré , que par une modification

de la règle ; & quelques réflexions sur la forme que doivent nécessairement avoir les racines des équations des degrés supérieurs, font bientôt voir qu'elle ne réussiroit point passé le quatrième degré. Les bornes que les matières plus nécessaires à notre objet, m'ont forcé de donner à l'exposition de la méthode que je propose, m'ont empêché d'entrer dans quelques détails sur son application au cinquième degré & aux degrés supérieurs. Je m'étois même proposé de ne rien publier sur ce sujet, que lorsque, libre d'autres occupations, j'aurois pu y donner la perfection dont je le crois susceptible ; mais M. Euler ayant publié, dans le tome IX des *nouv. Comment. de Pétersbourg*, qui vient de paroître, une méthode sur la même matière, je donne ici les choses, telles que je les ai trouvées d'abord, c'est-à-dire, sur la fin de 1761. Au reste, on trouvera plus de détails dans les Mémoires de l'Académie ; on y trouvera entre autres choses, une méthode pour les équations, dont le degré est marqué par un nombre composé ; cette méthode simplifie le travail dans ces cas : nous aurions pû l'employer ici pour le quatrième degré ; mais dans le dessein où nous étions de faire voir ce que l'on pouvoit présumer de l'application de notre méthode, aux degrés supérieurs, nous avons préféré d'observer l'uniformité.

Sous le même caractère d'impression, sont encore

compris beaucoup d'autres objets que nous avons cru devoir traiter, pour ne pas obliger de recourir ailleurs.

Dans la seconde Section, nous nous sommes attaché à faire voir la manière d'appliquer l'Algèbre, d'en traduire les résultats, de les exprimer par lignes. Nous avons tâché de faire bien entendre comment l'Algèbre comprend, dans une même équation, tous les différens cas d'une question; ce que signifient les différentes racines, positives, négatives, réelles, ou imaginaires.

La connoissance des principales propriétés des sections coniques, nous a paru devoir entrer dans notre plan, quelques-unes de ces courbes se rencontrant assez souvent dans l'Architecture Navale. Enfin, leur usage pour la construction des équations nous y a encore déterminé. Nous avons fait en sorte de présenter ces objets & plusieurs autres qu'on trouvera dans le cours de l'Ouvrage, de manière qu'ils devinssent le germe de connoissances plus étendues pour ceux qui desireront les acquérir.



T A B L E

D E S M A T I È R E S.

D E L' A L G È B R E.

P R E M I È R E S E C T I O N ,

<i>DANS laquelle on donne les principes du Calcul des Quantités algébriques,</i>	page 1
<i>Des Opérations fondamentales sur les Quantités considérées généralement,</i>	3
<i>De l'Addition & de la Soustraction,</i>	ibid.
<i>De la Multiplication,</i>	9
<i>De la Division,</i>	23
<i>De la manière de trouver le plus grand commun Diviseur de deux Quantités littérales,</i>	33
<i>Des Fractions littérales,</i>	36
<i>Des Équations,</i>	43
<i>Des Équations du premier degré à une seule Inconnue,</i>	45
<i>Application des Principes précédens, à la résolution de quelques Questions simples,</i>	57
<i>Réflexions sur les Quantités positives & les Quantités négatives,</i>	71
<i>Des Équations du premier degré, à deux Inconnues,</i>	77
<i>Des Équations du premier degré, à trois & à un plus grand nombre d'Inconnues,</i>	82

<i>Application des Règles précédentes à la résolution de quelques Questions qui renferment plus d'une Inconnue,</i>	92
<i>Des Cas où les Questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'Équations que d'Inconnues, & des cas où les Questions sont impossibles,</i>	101
<i>Des Problèmes indéterminés,</i>	105
<i>Des Équations du second degré, à une seule Inconnue,</i>	112
<i>Application de la Règle précédente, à la Résolution de quelques Questions du second degré,</i>	120
<i>De l'Extraction de la Racine quarrée des Quantités littérales,</i>	130
<i>Du Calcul des Quantités affectées du signe $\sqrt{}$,</i>	136
<i>De la Formation des Puissances des Quantités monomes, de l'Extraction de leurs Racines, & du Calcul des Radicaux & des Exposans,</i>	140
<i>De la Formation des Puissances des Quantités complexes, & de l'Extraction de leurs Racines,</i>	152
<i>De l'Extraction des Racines des Quantités complexes,</i>	167
<i>De la manière d'approcher de la Racine des Puissances imparfaites des Quantités littérales,</i>	172
<i>Des Équations à deux Inconnues lorsqu'elles passent le premier degré,</i>	182
<i>Des Équations à plus de deux Inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré,</i>	192
<i>Des Équations à deux termes,</i>	193
<i>Des Équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré,</i>	195

DES MATIÈRES. xv

<i>De la Composition des Équations ,</i>	197
<i>Des Transformations qu'on peut faire subir aux Équations ,</i>	206
<i>De la Résolution des Équations composées ,</i>	209
<i>Application au troisième degré ,</i>	213
<i>Application au quatrième degré ,</i>	221
<i>Réflexions sur la Méthode précédente , & sur son application aux degrés supérieurs au quatrième ,</i>	230
<i>Des Diviseurs commensurables des Équations ,</i>	236
<i>De l'Extraction des Racines des Quantités en partie commensurables & en partie incommensurables ,</i>	242
<i>De la manière d'approcher des Racines des Équations composées ,</i>	247
<i>Réflexions sur la Méthode précédente ,</i>	251
<i>De la manière d'avoir les Racines égales des Équations ,</i>	252
<i>De la manière d'avoir les Racines imaginaires des Équations ,</i>	254

SECONDE SECTION,

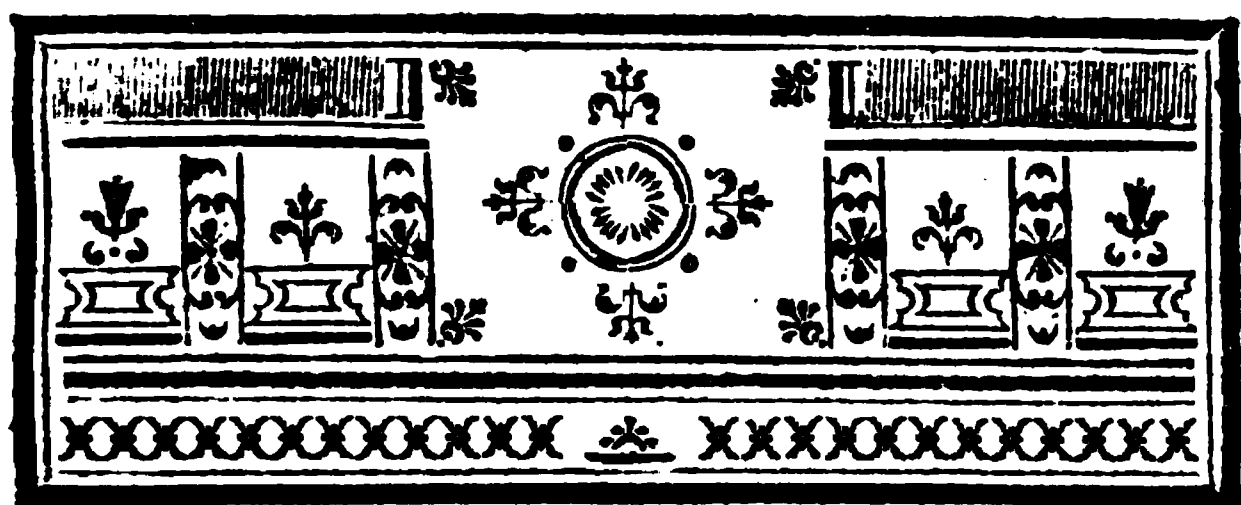
<i>DANS laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique & à la Géométrie ,</i>	256
<i>Propriétés générales des Progressions arithmétiques ,</i>	258
<i>De la Sommation des Puissances des termes d'une Progression arithmétique quelconque ,</i>	268
<i>Propriétés & usages des Progressions géométriques ,</i>	278
<i>De la sommation des suites récurrentes ,</i>	285

xvj TABLE DES MATIÈRES.

<i>De la Construction géométrique des Quantités algébriques,</i>	286
<i>Diverses Questions de Géométrie, & Réflexions, tant sur la manière de les mettre en Équation, que sur les diverses solutions que donnent ces Équations,</i>	299
<i>Autres applications de l'Algèbre à divers objets,</i>	341
<i>Des Lignes courbes en général, & en particulier des Sections coniques,</i>	350
<i>De l'Ellipse,</i>	360
<i>De l'Hyperbole,</i>	387
<i>De l'Hyperbole entre ses Asymptotes,</i>	408
<i>De la Parabole,</i>	413
<i>Réflexions sur les Équations aux Sections coniques,</i>	425
<i>Moyens de ramener aux Sections coniques, toute Équation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible,</i>	432
<i>Application de ce qui précède, à la résolution de quelques Questions indéterminées,</i>	446
<i>Application des mêmes Principes à quelques Questions déterminées,</i>	461
<i>Appendice,</i>	480

Fin de la Table.

DE L'ALGÈBRE.



DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION,

*Dans laquelle on donne les principes du calcul
des quantités Algébriques.*

1. **L**E but de la science qu'on appelle *Algèbre*, est de donner les moyens de ramener à des règles générales la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on considère, mais bien de la nature de chaque question, & doivent être toujours les mêmes pour toutes les questions d'une même espèce.

Il suit de-là que l'*Algèbre* ne doit point se borner à employer, pour représenter les quantités, les mêmes

Marine. Algèbre.

A

caractères ou les mêmes signes que l'Arithmétique. En effet, lorsque, par les règles de celles-ci, on est parvenu à un résultat, rien ne retrace plus à l'esprit la route qui y a conduit. Qu'une ou plusieurs opérations arithmétiques m'aient donné 12 pour résultat, je ne vois rien dans 12 qui m'indique si ce nombre est venu de la multiplication de 3 par 4, ou de 2 par 6, ou de l'addition de 5 avec 7, ou de 2 avec 10, ou, en général, de toute autre combinaison d'opérations. L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats ; mais ces résultats ne peuvent pas fournir des règles. L'Algèbre doit remplir ces deux objets ; & pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux (ce sont les lettres de l'Alphabet), qui n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'avec tout autre, ne représentent que ce qu'on veut ou ce que l'on convient de leur faire représenter. Ces signes toujours présents aux yeux dans toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent ; ou du moins ils offrent dans les résultats de ces opérations, des traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Nous ne nous attachons point ici à développer davantage cette légère idée que nous donnons de l'Algèbre ; la suite de cet Ouvrage y est destinée.

Non-seulement on représente , en Algèbre , les quantités , par des signes généraux : on y représente aussi leur manière d'être les unes à l'égard des autres , & les différentes opérations qu'on a dessein de faire sur elles : en un mot , tout est représentation ; & lorsqu'on dit qu'on fait une opération , c'est une nouvelle forme qu'on donne à une quantité. A mesure que nous avancerons , nous ferons connoître ces différentes manières de représenter ce qui a rapport aux quantités.

Des opérations fondamentales sur les quantités considérées généralement.

1. On fait , en Algèbre , sur les quantités représentées par des lettres , des opérations analogues à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres ; c'est-à-dire , qu'on les ajoute , on les soustrait , on les multiplie , on les divise , &c. ; mais ces opérations diffèrent de celles de l'Arithmétique , en ce que leurs résultats ne sont souvent que des indications d'opérations arithmétiques.

De l'Addition & de la Soustraction.

3. L'addition des quantités semblables n'a besoin d'aucune règle ; il est évident que pour ajouter une quantité représentée par a , avec la même quantité a ,

il faut écrire $2a$. Pour ajouter $2a$, avec $3a$, il faut écrire $5a$, & ainsi de suite.

Quant aux quantités dissemblables, & qu'on représente toujours par des lettres différentes, on ne fait qu'indiquer cette addition; & cela s'indique par le moyen de ce signe $+$, qui se prononce *plus*. Ainsi, si l'on veut ajouter une quantité représentée par a , avec une autre représentée par b , on ne peut faire autre chose qu'écrire $a + b$; en sorte qu'on ne connoît véritablement le résultat que quand on connaît les valeurs particulières des quantités représentées par a & par b ; si a vaut 5, & si b vaut 12, $a + b$ vaudra 17.

Pareillement, pour ajouter $5a + 3b$, avec $9a + 2c$ & $9b + 3d$, on écrira $5a + 3b + 9a + 2c + 9b + 3d$; & rassemblant les quantités semblables, on aura $14a + 12b + 2c + 3d$.

4. Il y a les mêmes choses à dire sur la soustraction que sur l'addition. Si les quantités sont semblables, on n'a besoin d'aucune règle: il est évident que si de $5a$ on veut retrancher $2a$, il reste $3a$.

Mais si les quantités sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer la soustraction; cela s'indique à l'aide de ce signe $-$, qu'on prononce en disant *moins*. Ainsi si l'on a b à retrancher de a , on écrira $a - b$. Pour retrancher $3b$ de $5a$, on écrira $5a - 3b$.

— $3b$. Pour retrancher $5a + 4b$, de $9a + 6b$, on écrira $9a + 6b - 5a - 4b$, & faisant déduction des quantités semblables (ce qu'on appelle faire la *réduction*), on a pour reste $4a + 2b$. Enfin pour retrancher $5a + 3b + 4c$ de $6a + 4b + 4d$, on écrira $6a + 4b + 4d - 5a - 3b - 4c$, & en réduisant, on aura $a + b + 4d - 4c$.

5. Un nombre qui précède une lettre s'appelle le *coefficient* de cette lettre ; ainsi dans $3b$, 3 est le coefficient de b . Lorsqu'une lettre doit avoir 1 pour coefficient, on ne met point ce coefficient : ainsi lorsque de $3a$ on retranche $2a$, il reste $1a$; on écrit seulement a . Il faut donc bien se garder de croire que le coefficient d'une lettre, lorsqu'il ne paroît point, soit zéro ; il est alors l'unité ou 1.

6. Il importe peu dans quel ordre on écrive les quantités qu'on ajoute ou qu'on retranche ; si l'on a a à ajouter avec b , on peut indifféremment écrire $a + b$ ou $b + a$; & pour retrancher b de a , on peut écrire également $a - b$ ou $-b + a$. Mais comme on prononce plus aisément les lettres dans l'ordre alphabétique que dans tout autre, nous suivrons cet ordre autant que nous le pourrons.

7. Remarquons encore que lorsqu'une quantité n'a point de signe, elle est censée avoir le signe + ;

a est la même chose que $+ a$. On est dans l'usage de supprimer le signe dans la quantité qu'on écrit la première, lorsque cette quantité doit avoir le signe $+$; mais si elle devait avoir le signe $-$, il ne faudroit pas l'omettre.

8. Lorsqu'après une opération on procède à la réduction, il peut arriver que l'on ait une quantité à retrancher d'une autre plus petite : alors on retranche la plus petite, de la plus grande, & on donne au reste, le signe de la plus grande. Par exemple, si après avoir ajouté $2a + 3b$, avec $5a - 7b$, on veut réduire le résultat $2a + 3b + 5a - 7b$, on écrira $7a - 4b$, en retranchant $3b$ de $7b$, & donnant au reste $4b$, le signe qu'avoit $7b$. En effet le signe $-$ de $7b$ dans la quantité $5a - 7b$, indique que $7b$ doit être retranché ; mais si l'on vient à augmenter $5a - 7b$ de la quantité $2a + 3b$, il est visible que les $3b$ qu'on ajoute, diminuent d'autant la soustraction qu'on avoit à faire ; il ne doit donc plus y avoir que $4b$ à retrancher ; il faut donc qu'il y ait $- 4b$ dans le résultat. De-là nous concluons cette règle générale : *L'addition des quantités algébriques se fait en écrivant leurs parties, à la suite les unes des autres, avec leurs signes tels qu'ils sont : on réduit ensuite les quantités semblables, à une seule, en rassemblant d'une part toutes celles qui*

ont le signe $+$, & d'une autre part, toutes celles qui ont le signe $-$; enfin on retranche le plus petit résultat, du plus grand, & on donne au reste, le signe qu'avoit le plus grand.

E X E M P L E.

On veut ajouter les quatre quantités suivantes :

$$\begin{array}{r} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \\ \hline \end{array}$$

Somme $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Faisant la réduction, j'ai pour les a , $15a$; pour les b , j'ai $+7b$ d'une part & $-9b$ de l'autre, & par conséquent $-2b$ pour reste; pour les c , j'ai $-9c$ d'une part, & $+6c$ de l'autre, & par conséquent $-3c$ pour reste; réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Les quantités séparées par les signes $+$ & $-$, s'appellent les *termes* des quantités dont elles font parties.

10. Une quantité est appelée *Monome*, *Binome*, *Trinome*, &c. selon qu'elle est composée de 1, ou de 2, ou de 3, &c. termes; & une quantité composée de plusieurs termes dont on ne définit pas le nombre, s'appelle en général un *Polynome*.

11. A l'égard de la soustraction des quantités algébriques, voici la règle générale: *Changez les signes*

des termes de la quantité que vous devez soustraire , c'est-à-dire , changez + en — , & — en + ; ajoutez ensuite cette quantité , ainsi changée , avec celle dont on doit soustraire , & réduisez.

E X E M P L E.

De $6a - 3b + 4c$ on veut retrancher la quantité $5a - 5b + 6c$.

A la suite de $6a - 3b + 4c$, j'écris $- 5a + 5b - 6c$; qui est la seconde quantité , dans laquelle on a changé les signes ; & j'ai $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$, & en réduisant , $a + 2b - 2c$ pour reste.

Pour rendre raison de cette règle , prenons un exemple plus simple. Supposons que de a on veuille retrancher b , il est évident qu'on doit écrire $a - b$; mais si de a on vouloit retrancher $b - c$, je dis qu'il faut écrire $a - b + c$; en effet il est clair qu'ici ce n'est pas b tout entier qu'il s'agit de retrancher , mais seulement b diminué de c ; si donc on retranche d'abord b tout entier en écrivant $a - b$, il faut ensuite , pour compenser , ajouter ce qu'on a ôté de trop , il faut donc ajouter c , il faut donc écrire $a - b + c$, c'est-à-dire , qu'il faut changer les signes de tous les termes de la quantité qu'on doit soustraire.

Dans les nombres , cette attention n'est pas nécessaire , parce que si l'on avoit $8 - 3$, par exemple ,

à retrancher de 12, on commenceroit par diminuer 8 de 3, ce qui donneroit 5 qu'on retrancheroit de 12, & on auroit 7 pour reste; mais on voit aussi qu'on pourroit retrancher d'abord 8 de 12, & au reste 4 ajouter 3, ce qui donneroit également 7; or c'est ce dernier parti qu'on prend & qu'il faut nécessairement prendre en Algèbre, parce qu'on ne peut faire la réduction préliminaire comme sur les nombres.

12. Les quantités précédées du signe +, se nomment quantités *positives*; & celles qui sont précédées du signe —, se nomment quantités *negatives*. Nous entrerons par la suite, dans quelque détail sur la nature & les usages de ces quantités considérées séparément l'une de l'autre.

De la Multiplication.

13. La Multiplication algébrique exige quelques considérations qui lui sont particulières, & qui n'ont pas lieu dans la multiplication arithmétique. Indépendamment des quantités, il y a encore les signes à considérer.

Au reste, à ne considérer que les valeurs numériques des quantités représentées par les lettres, on doit se former de la multiplication algébrique, la

même idée que de la multiplication arithmétique (*Arithm.* 40); ainsi, multiplier a par b , c'est prendre la quantité représentée par a , autant de fois qu'il y a d'unités dans la quantité représentée par b .

14. Mais comme l'objet est ici de faire ou de représenter la multiplication, indépendamment des valeurs numériques des quantités, il faut convenir des signes par lesquels nous indiquerons cette multiplication.

On fait souvent usage de ce signe \times , qui signifie *multiplié par*; en sorte que $a \times b$ signifie a multiplié par b , ou que l'on doit multiplier a par b .

On fait aussi usage du point, que l'on interpose entre les deux quantités qu'on doit multiplier; en sorte que $a . b$ & $a \times b$ signifient la même chose.

Enfin on indique encore la multiplication (du moins entre les quantités monomes), en ne mettant aucun signe entre le multiplicande & le multiplicateur; ainsi $a \times b$, $a . b$, ab sont trois expressions dont chacune désigne qu'on doit multiplier a par b . Cette dernière est la plus usitée.

15. Pour multiplier ab par c , on écrira donc abc . Pour multiplier ab par cd , on écrira $abcd$, & ainsi

de suite : il importe peu d'ailleurs dans quel ordre ces lettres soient écrites , parce que (*Arith.* 44) le produit est toujours le même dans quelque ordre qu'on multiplie.

16. Lors donc qu'à l'avenir nous rencontrerons une quantité comme ab , ou abc , ou $abcd$, &c., dans laquelle plusieurs lettres se trouveront écrites de suite sans aucun signe, nous en concluons que cette quantité représente le produit de la multiplication successive de chacune des lettres qui la composent.

17. Nous avons nommé (*Arith.* 42) facteur d'un produit, tout nombre qui, par la multiplication, a concouru à former ce produit; ainsi dans ab , a & b sont les facteurs; dans abc , les facteurs sont a , b , c , & ainsi de suite.

18. Il suit de la règle que nous venons de donner (15), que *le produit de la multiplication de plusieurs quantités algébriques monomes, doit renfermer toutes les lettres qui se trouvent tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

Cela posé, si les quantités qu'on doit multiplier étoient composées de la même lettre, cette lettre se trouveroit donc écrite dans le produit autant de fois qu'elle l'est dans tous les facteurs ensemble,

quel que soit le nombre des quantités qu'on ait à multiplier : ainsi a multiplié par a donneroit aa ; aa multiplié par aaa donneroit $aaaaa$; aa multiplié par aaa & multiplié encore par a , donneroit $aaaaaa$.

19. Dans ce cas, on est convenu de n'écrire cette lettre qu'une seule fois, mais de marquer, par un chiffre qu'on appelle *Exposant*, & qu'on place sur la droite & un peu au-dessus de la lettre, combien de fois cette lettre est facteur, ou combien de fois elle doit être écrite. Au lieu de aa , on écrira donc a^2 ; au lieu de aaa , on écrira a^3 ; au lieu de $aaaaa$, on écrira a^5 , & ainsi des autres.

Souvenons-nous donc à l'avenir, que *l'exposant d'une lettre, marque combien de fois cette lettre est facteur dans un produit*. Dans $a^3 b^2 c$ il y a trois facteurs de valeur différente, savoir, a , b , c : mais, de ces lettres, la première est facteur trois fois ; la seconde, deux fois ; & la troisième, une fois : en effet, $a^3 b^2 c$ équivaut à $aaabbc$.

Il faut donc bien se garder de confondre l'exposant avec le coefficient ; de confondre, par exemple, a^2 avec $2a$, a^3 avec $3a$: dans $2a$, le coefficient 2 marque que a est ajouté avec a , c'est-à-dire, que $2a$ équivaut à $a + a$; mais dans a^2 , l'exposant 2

marque que la lettre a devroit être écrite deux fois de suite sans aucun signe ; qu'elle est multipliée par elle-même , ou enfin qu'elle est facteur deux fois ; c'est-à-dire , que a^2 équivaut à $a \times a$; en sorte que si a vaut 5 , par exemple , $2a$ vaut 10 ; mais a^2 vaut 25.

10. On voit donc que *pour multiplier deux quantités monomes qui auroient des lettres communes , on peut abréger l'opération , en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande & du multiplicateur.* Ainsi pour multiplier a^5 par a^3 , j'écris a^8 , c'est-à-dire , que j'écris la lettre a en lui donnant pour exposant , les deux exposans 5 & 3 réunis. De même pour multiplier $a^3 b^2 c$ par $a^4 b^3 c d$, j'écris $a^7 b^5 c^2 d$, en écrivant d'abord toutes les lettres différentes $a b c d$, & donnant ensuite à la première pour exposant 7 qui est la somme des exposans 3 & 4 ; à la seconde , 5 qui est la somme des deux exposans 2 & 3 ; & à la troisième , 2 qui est la somme des deux exposans 1 & 1 ; car quoique l'exposant de c ne soit pas marqué , on doit néanmoins sous-entendre qu'il est 1 , puisque c est facteur une fois ; donc *toute lettre dont l'exposant n'est point écrit , est censée avoir 1 pour exposant ; & réciproquement , toutes les fois qu'une lettre devra avoir 1 pour exposant , on peut se dispenser d'écrire cet exposant.*

Telle est la règle pour les lettres dans les quantités monomes.

21. Quand les quantités monomes sont précédées d'un chiffre , c'est-à-dire , d'un coefficient , il faut commencer la multiplication par ce coefficient , & cette multiplication se fait suivant les règles de l'Arithmétique ; ainsi pour multiplier $5a$ par $3b$, je multiplie d'abord 5 par 3 , puis a par b , & je trouve $15ab$ pour produit. Pareillement , si j'ai $12a^3b^2$ à multiplier par $9a^4b^3$, j'aurai $108a^7b^5$.

Nous avons dit en Arithmétique , qu'une quantité étoit élevée à la première , seconde , troisième , &c. puissance , ou au premier , second , troisième degré , selon qu'elle étoit facteur 1 , 2 , 3 , &c. fois ; donc une lettre qui a pour exposant 1 , ou 2 , ou 3 , ou 4 , &c. , est censée élevée à la première , ou à la seconde , ou à la troisième puissance ; ainsi a^2 est la seconde puissance ou le quarré de a ; a^3 est le cube ou la troisième puissance de a , & ainsi de suite.

22. Ces principes posés , venons à la multiplication des quantités complexes. Il faut , pour cette multiplication , suivre le même procédé qu'on suit en Arithmétique pour les nombres qui ont plusieurs chiffres , c'est-à-dire , qu'il faut multiplier successivement chacun des termes du multiplicande , par chacun

des termes du multiplicateur, & cela en observant les règles que nous venons de donner pour les monomes. On n'est point assujetti, comme en Arithmétique, à opérer en allant de droite à gauche plutôt que de gauche à droite; cela est indifférent; nous prendrons même ce dernier parti qui est le plus en usage.

EXEMPLE I^{er}.

On propose de multiplier $a + b$

par c

Produit . . . $ac + bc$.

- 1°. Je multiplie a par c , ce qui (15) me donne ac .
- 2°. Je multiplie b par c , ce qui me donne bc ; j'ajoute ce second produit au premier en les unissant par le signe $+$, & j'ai $ac + bc$ pour produit total.

S'il y avoit un second terme au multiplicateur, je multiplierois actuellement par ce second terme, & j'ajouterois ce second produit au premier.

EXEMPLE II.

Si j'avois $a + b$

à multiplier par . . . $c + d$

Produit $ac + bc + ad + bd$

Après avoir multiplié a & b par c , ce qui donne $ac + bc$, je multiplierois aussi a & b par d , ce qui me donneroit $ad + bd$, qui joint au premier produit, donne $ac + bc + ad + bd$. En effet, multiplier $a + b$ par $c + d$, c'est prendre non-seulement a , mais encore b , autant de fois qu'il y a d'unités

dans la totalité de $c + d$, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans c , plus autant de fois qu'il y a d'unités dans d .

E X E M P L E I I I.

On propose de multiplier $a - b$

par c

Produit $ac - bc$.

Après avoir multiplié a par c ce qui donne ac , je multiplie b par c , ce qui me donne bc ; mais au lieu d'ajouter ce dernier produit au premier, je l'en retranche, parce qu'ici ce n'est point la somme des deux quantités a & b qu'il s'agit de multiplier, mais seulement leur différence, puisque $a - b$ signifie qu'on doit retrancher b de a ; or si l'on multiplie a tout entier, ainsi qu'on le fait par la première opération, il est visible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a devoit être diminué; il faut donc ôter de ce produit, la quantité b multipliée par c , c'est-à-dire, ôter bc .

Dans les nombres, cette attention n'est pas nécessaire, parce qu'avant de faire la multiplication, on feroit la soustraction qui est indiquée ici dans le multiplicande. Si l'on avoit, par exemple, $8 - 3$ à multiplier par 4, on réduiroit tout de suite le multiplicande $8 - 3$ à 5, que l'on multiplieroit ensuite par 4. Mais on voit aussi qu'on viendrait également au même résultat en multipliant d'abord 8 par 4, ce qui donneroit 32, puis 3 par 4, ce qui donneroit 12, & retranchant ce dernier produit du premier, on auroit 20 comme par la première voie; or cette seconde manière qu'il feroit peut-être ridicule d'employer pour les nombres, devient indispensable pour les quantités littérales, puisque dans celles-ci la soustraction préliminaire ne peut avoir lieu.

E X E M P L E

EXEMPLE IV.

On propose de multiplier $a - b$

par $c - d$

Produit $ac - bc - ad + bd$.

On multipliera d'abord $a - b$ par c , ce qui donnera $ac - bc$; on multipliera ensuite $a - b$ par d , ce qui donnera $ad - bd$; enfin on retranchera ce second produit $ad - bd$, du premier, & (11) on aura $ac - bc - ad + bd$ pour produit total.

En effet, puisque le multiplicateur est moindre que c , de la quantité d , il marque qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'autant de fois qu'il y a d'unités dans c diminué de d ; or comme on ne peut faire cette diminution avant la multiplication, on peut prendre d'abord $a - b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c , c'est-à-dire, multiplier $a - b$ par c , puis en retrancher $a - b$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans d , c'est-à-dire, en retrancher le produit de $a - b$ par d .

23. Si l'on fait attention aux signes des termes qui composent le produit total $ac - bc - ad + bd$, & qu'on les compare avec les signes des termes du multiplicande & du multiplicateur qui les ont donnés, on observera 1°. que le terme a qui est censé avoir le signe $+$, étant multiplié par le terme c qui est censé aussi avoir le signe $+$, a donné pour produit ac qui est censé avoir le signe $+$.

2°. Que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme c qui est censé avoir le signe $+$, a donné pour produit bc avec le signe $-$.

Marine. Algèbre.

B

3°. Que le terme a qui a le signe $+$, multiplié par le terme d qui a le signe $-$, a donné pour produit ad avec le signe $-$.

4°. Enfin que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme d qui a aussi le signe $-$, a donné pour produit le terme bd qui a le signe $+$.

Donc à l'avenir nous pourrions reconnoître facilement dans les multiplications partielles, si les produits particuliers doivent être ajoutés ou retranchés; il suffira pour cela d'observer les deux règles suivantes que nous fournissent les observations que nous venons de faire.

24. Si les deux termes que l'on doit multiplier l'un par l'autre ont tous deux le même signe, c'est-à-dire, ou tous deux $+$ ou tous deux $-$, leur produit aura toujours le signe $+$. Si au contraire ils ont différens signes, c'est-à-dire, l'un $+$ & l'autre $-$, ou l'un $-$ & l'autre $+$, leur produit aura toujours le signe $-$.

A l'aide de ces règles & de celles que nous avons données (15, 20, 21 & 22), on est en état de faire toute multiplication algébrique. Mais pour procéder avec méthode, on observera d'abord la règle des signes, puis celle des coefficients, enfin celle des lettres & des exposans.

Terminons par un exemple où toutes ces règles soient appliquées.

EXEMPLE V.

On propose de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
par $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}$$

Produit $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Je multiplie successivement les trois termes $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$, par le premier terme a^3 du multiplicateur. Les deux termes $5a^4$ & a^3 ayant le même signe, le produit (24) doit avoir le signe $+$; mais j'ometts ce signe, parce qu'il appartient au premier terme du produit (7). Je multiplie ensuite le coefficient 5 de a^4 , par le coefficient 1 de a^3 (21), ce qui me donne 5; enfin multipliant a^4 par a^3 selon la règle donnée (20) c'est-à-dire, ajoutant les deux exposans 4 & 3, j'ai a^7 , & par conséquent $5a^7$ pour produit.

Je passe au terme $-2a^3b$; & pour le multiplier par a^3 , je vois que les signes de ces deux quantités étant différens, le produit doit avoir le signe $-$; je multiplie ensuite le coefficient 2 de a^3b par le coefficient 1 de a^3 , & enfin a^3b par a^3 , & j'ai $-2a^6b$ pour produit.

Par un procédé semblable, le terme $+4a^2b^2$ multiplié par a^3 donnera $+4a^5b^2$.

Après avoir multiplié tous les termes du multiplicande par a^3 , il faut les multiplier par le second terme $-4a^2b$ du multiplicateur. Le terme $5a^4$ multiplié par $-4a^2b$ de

signe différent donnera $-20a^6b$; le terme $-2a^3b$ multiplié par $-4a^2b$ de même signe, donnera $+8a^5b^2$; & le terme $+4a^2b^2$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-16a^4b^3$.

Enfin on passera à la multiplication par le terme $+2b^3$, & en suivant les mêmes règles on trouvera $+10a^4b^3$, $-4a^3b^4 + 8a^2b^5$ pour les trois produits partiels.

Faisant attention que parmi tous les différens produits partiels qu'on vient de trouver, il y a des termes semblables, c'est-à-dire, composés des mêmes lettres avec les mêmes exposans, on fera la réduction en réunissant ceux qui ont le même signe & déduisant ceux qui ont des signes contraires, ce qui donnera enfin $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ pour produit total.

25. Comme il importe de se familiariser avec la pratique de cette règle, nous joignons ici (*Voy.* pag. 33), pour exercer les Commençans, une Table qui renferme plusieurs exemples. Nous ajouterons en même temps quelques remarques sur quelques-uns de ces exemples.

Dans le premier, on a multiplié $a + b$ qui représente généralement la somme de deux quantités, par $a - b$ qui représente généralement leur différence, & l'on trouve pour produit $a^2 - b^2$ qui est la différence du carré de la première au carré de la seconde, ou la différence des carrés de ces deux quantités. On peut donc dire généralement que *la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne toujours, pour produit, la différence des carrés de ces mêmes quantités.* Que l'on prenne deux nombres quelconques, 5

& 3, par exemple; leur somme est 8 & leur différence 2, lesquelles multipliées l'une par l'autre donnent 16, qui est en effet la différence du carré de 5 au carré de 3, c'est-à-dire, de 25 à 9. Et réciproquement, *la différence des carrés des deux quantités, peut toujours être considérée comme formée par la multiplication de la somme de ces deux quantités par leur différence.* Ainsi la quantité $b^2 - c^2$ qui est la différence du carré de b au carré de c , vient de la multiplication de $b + c$ par $b - c$. Ces deux propositions nous seront utiles par la suite.

On peut déjà remarquer en passant, un des usages de l'Algèbre pour découvrir des vérités générales.

Le second exemple fait voir d'une manière générale & simple ce que nous avons dit en Arithmétique sur la composition du carré, savoir que *le carré de la somme $a + b$ de deux quantités, est composé du carré a^2 de la première, du double $2ab$ de la première multipliée par la seconde, & du carré b^2 de la seconde.*

Le troisième exemple confirme ce que nous avons dit aussi en Arithmétique sur la formation du cube. On y voit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, carré de $a + b$, qui après avoir été multiplié par $a + b$, donne $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dont le premier terme est le cube de a , le second qui est le même que $3a^2 \times b$ est le triple du carré de a , multiplié par b ; on voit de même que $3ab^2$ est le triple de a multiplié par le carré de b ; & enfin b^3 est le cube de b .

26. Pour indiquer la multiplication entre deux quantités complexes, on est dans l'usage de renfermer chacune de ces deux quantités entre deux

crochets, & d'interposer entre elles l'un des signes de multiplication dont nous avons parlé plus haut (14); quelquefois même on n'interpose aucun signe : ainsi pour marquer que la totalité de la quantité $a^2 + 3ab + b^2$ doit être multipliée par la totalité de $2a + 3b$, on écrit $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$ ou $(a^2 + 3ab + b^2) \cdot (2a + 3b)$ ou simplement $(a^2 + 3ab + b^2)(2a + 3b)$. Quelquefois au lieu d'écrire chaque quantité entre deux crochets, on couvre chacune d'une barre en cette manière ,

$$\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}.$$

27. Il y a beaucoup de cas où il est plus avantageux d'indiquer la multiplication que de l'exécuter. On ne peut donner de règles générales sur ce sujet, parce que cela dépend des circonstances qui donnent lieu à ces opérations : nous verrons par la suite plusieurs de ces cas. C'est principalement par l'usage qu'on apprend à les distinguer. On peut, cependant, dire assez généralement, qu'il convient de se contenter d'indiquer les multiplications, lorsque celles-ci doivent être suivies de la division, parce que cette dernière opération s'exécutant souvent, ainsi qu'on va le voir, par la seule suppression des facteurs communs au dividende & au diviseur, on distingue plus facilement ces facteurs communs, lorsqu'on n'a fait qu'indiquer la multiplication.

De la Division.

28. La manière de faire cette opération en Algèbre, dépend beaucoup des signes que nous sommes convenus d'employer pour la multiplication. L'objet en est d'ailleurs le même qu'en Arithmétique.

29. Lorsque la quantité qu'on proposera à diviser n'aura aucune lettre commune avec le diviseur, alors ils n'est pas possible d'exécuter l'opération; on ne peut que l'indiquer, & cela se fait en écrivant le diviseur au-dessous du dividende, en forme de fraction, & séparant l'un de l'autre par un trait; ainsi pour marquer qu'on doit diviser a par b , on écrit $\frac{a}{b}$, & l'on prononce a divisé par b ; pour marquer qu'on doit diviser $aa + bb$ par $c + d$, on écrit $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Lorsque le dividende & le diviseur sont monomes, si toutes les lettres qui se trouvent dans le diviseur, se trouvent aussi dans le dividende, la division peut être faite exactement, & on l'exécutera en suivant cette règle... *Supprimez dans le dividende, toutes les lettres qui lui sont communes avec le diviseur; les lettres qui resteront, composeront le quotient.* Ainsi pour diviser ab par a , je supprime a dans le dividende ab , & j'ai b pour quotient. Pour

diviser abc par ab , je supprime ab dans le dividende, & j'ai c pour quotient.

En effet, puisque (15) les lettres écrites sans aucun signe interposé, sont les facteurs de la quantité dans laquelle elles entrent, les lettres du diviseur, qui sont communes au dividende, sont donc facteurs de ce dividende; or nous avons vu (*Arith.* 69) que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur; donc le quotient doit être composé des lettres du dividende qui ne sont point communes entre celui-ci & le diviseur.

31. Il suit de-là que lorsqu'il y aura des exposans, la règle qu'on doit suivre, est de *retrancher l'exposant de chaque lettre du diviseur, de l'exposant de pareille lettre du dividende*; ainsi pour diviser a^3 par a^2 , je retranche 2 de 3, il me reste 1, & par conséquent j'ai a^1 ou a pour quotient. De même, ayant à diviser $a^4 b^3 c^2$ par $a^2 b c$, j'aurai $a^2 b^2 c$. En effet $\frac{a^3}{a^2}$ est la même chose que $\frac{a a a}{a a}$ qui selon la règle donnée (30) se réduit à a , en ôtant les lettres communes au dividende & au diviseur. En général puisque le quotient ne doit avoir que les lettres qui ne sont point communes au dividende & au diviseur, l'exposant de chaque lettre du quotient ne

doit donc être que la différence entre les exposans de cette lettre dans le dividende & dans le diviseur.

32. Donc si une lettre a le même exposant dans le dividende & dans le diviseur, elle aura zéro pour exposant dans le quotient; ainsi a^3 divisé par a^3 donnera a^0 ; $a^3 b c^2$ divisé par $a^2 b c^2$ donne $a^1 b^0 c^0$ ou $a b^0 c^0$. Dans ce cas on peut se dispenser d'écrire les lettres qui ont 0 pour exposant; car chacune d'elles n'est autre chose que l'unité. En effet, lorsqu'on divise a^3 par a^3 , on cherche combien de fois a^3 contient a^3 ; or il le contient évidemment 1 fois; le quotient doit donc être 1: d'un autre côté a^3 divisé par a^3 donne pour quotient, a^0 ; donc a^0 vaut 1. En général toute quantité qui a zéro pour exposant, vaut 1.

33. Si quelques lettres du diviseur ne sont pas communes au dividende, ou si quelques-uns des exposans du diviseur sont plus grands que ceux de pareilles lettres du dividende, alors la division ne peut être faite exactement: on ne peut que l'indiquer comme il a été dit ci-dessus (29). Mais on peut simplifier le quotient ou la quantité fractionnaire qui le représente alors. La règle qu'il faut suivre pour cela, est de supprimer dans le dividende & dans le diviseur, les lettres qui leur sont communes; en sorte que s'il y a des exposans, on efface la lettre qui

a le plus petit exposant, & l'on diminue de pareille quantité le plus grand exposant de la même lettre.

Par exemple, si l'on propose de diviser $a^5 b c^3$ par $a^2 b^3 c^4$, on écrira $\frac{a^5 b c^3}{a^2 b^3 c^4}$ que l'on réduira en cette manière; on effacera a^2 dans le diviseur, & l'on écrira seulement a^3 dans le dividende; on effacera b dans le dividende, & l'on écrira seulement b^2 dans le diviseur; enfin on effacera c^3 dans le dividende, & l'on écrira seulement c dans le diviseur; en sorte qu'on aura $\frac{a^3}{b^2 c}$. On trouvera de même que $\frac{a^2 b^5 c^3}{a^3 b c^2 d}$ se réduit à $\frac{b^4 c}{a d}$.

Si par ces opérations, il ne restoit plus aucune lettre dans le dividende, il faudroit écrire l'unité; ainsi $\frac{a^2}{a^3}$ se réduira à $\frac{1}{a}$.

La raison de ces règles est facile à saisir après tout ce qui a été dit ci-dessus; car, supprimer, ainsi qu'on le prescrit, le même nombre de lettres dans le dividende & dans le diviseur, c'est diviser, par une même quantité, chacun des deux termes de la fraction qui exprime le quotient; or cette opération (*Arith.* 89) n'en change point la valeur & simplifie la fraction.

34. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient que peuvent avoir le dividende, ou le diviseur, ou tous les deux. La règle qu'on doit suivre

à leur égard est de les diviser comme en Arithmétique ; & si la division ne peut pas être faite exactement , on les laisse sous la forme de fraction , que l'on réduit à sa plus simple expression (*Arith.* 92), lorsque cela est possible.

Par exemple , ayant à diviser $8a^3b$ par $4a^2b$, je divise 8 par 4 , & j'ai pour quotient , 2 ; divisant ensuite a^3b par a^2b , j'ai pour quotient , a , & par conséquent $2a$ pour quotient total. Ayant à diviser $8a^3b^2$ par $6ab$, j'écris $\frac{8a^3b^2}{6ab}$ que je réduis à $\frac{4a^2b}{3}$.

35. La règle que nous venons de donner (33), est générale , soit que le dividende & le diviseur soient monomes , soit qu'ils soient complexes ou polynomes , pourvu que dans ce dernier cas , les lettres communes au dividende & au diviseur soient en même temps communes à tous les termes séparés par les signes + & —. C'est ainsi qu'ayant $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ à diviser par $a^3 - 5a^2b$, on réduira le quotient $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$, à la quantité $\frac{a^2 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$ en supprimant a^2 qui est facteur commun de tous les termes du dividende & du diviseur.

36. Si le dividende & le diviseur sont complexes , on ne peut donner de règles générales pour reconnaître , par l'inspection seule , si la division peut ou ne peut pas être faite exactement. Il faut , pour s'en

assurer & trouver en même temps le quotient , faire l'opération que nous allons enseigner.

1°. Disposer , sur une même ligne , le dividende & le diviseur , & ordonner leurs termes par rapport à une même lettre commune à l'un & à l'autre , c'est-à-dire , écrire , par ordre de grandeur , les termes où cette lettre a des exposans consécutivement plus petits.

2°. Cette disposition faite , on sépare le dividende , du diviseur , par un trait , & on procède à la division en prenant seulement le premier terme du dividende que l'on divise , suivant les règles données ci-dessus (30 , 31 & 34) , par le premier terme du diviseur , & l'on écrit le quotient sous le diviseur.

3°. On multiplie successivement tous les termes du diviseur , par le quotient qu'on vient de trouver , & on porte les produits sous le dividende , en observant de changer leur signe.

4°. On souligne le tout , & après avoir fait la réduction des termes semblables , on écrit le reste au-dessous pour commencer une seconde division de la même manière ; en prenant pour premier terme , celui des termes restans qui a le plus fort exposant.

Sur quoi il faut remarquer qu'ici , comme dans la multiplication , on doit avoir égard aux signes du

terme du dividende & du terme du diviseur que l'on emploie : la règle est la même que pour la multiplication , c'est-à-dire , que

Si le dividende & le diviseur ont le même signe , le quotient aura le signe +.

Si , au contraire , ils ont différens signes , le quotient aura le signe —.

Cette règle pour les signes est fondée sur ce que (*Arith.* 74) le quotient multiplié par le diviseur , doit reproduire le dividende. Il faut donc que le quotient ait des signes tels qu'en le multipliant par le diviseur , on reproduise le dividende avec les mêmes signes ; or cette condition entraîne nécessairement la règle que nous venons de donner.

Pour procéder avec ordre , on commencera par les signes , puis on divisera le coefficient , enfin les lettres.

EXEMPLE

On propose de diviser $aa - bb$ par $b + a$.

J'ordonne le dividende & le diviseur par rapport à l'une ou à l'autre des deux lettres a & b , par rapport à a , par exemple ; & je les écris comme on le voit ici :

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Divid.} & aa - bb & \Bigg| \begin{array}{l} a + b \text{ Diviseur.} \\ a - b \text{ Quotient.} \end{array} \\
 & \underline{ - aa - ab } & \\
 \text{Reste.} & - ab - bb & \\
 & \underline{ + ab + bb } & \\
 \text{Reste.} & 0 &
 \end{array}$$

Le signe du premier terme aa du dividende, étant le même que celui de a premier terme du diviseur, je dois mettre $+$ au quotient; mais comme c'est le premier terme, je puis omettre le signe $+$.

Je divise aa par a ; j'ai pour quotient a que j'écris sous le diviseur.

Je multiplie successivement les deux termes a & b du diviseur, par le premier terme a du quotient, & j'écris les produits aa & ab sous le dividende, avec le signe $-$, contraire à celui qu'a donné la multiplication, parce que ces produits doivent être retranchés du dividende.

Je fais la réduction en effaçant les deux termes aa & $-aa$ qui se détruisent; il me reste $-ab$ qui, avec la partie restante $-bb$ du dividende, compose ce qui me reste à diviser.

Je continue la division en prenant $-ab$ pour premier terme de mon nouveau dividende.

Divisant $-ab$ par a , j'écris $-$ au quotient, parce que les signes du dividende & du diviseur sont différens; quant aux lettres, je trouve b pour quotient, & je l'écris à la suite du premier quotient.

Je multiplie les deux termes a & b du diviseur, par le terme $-b$ du quotient; les deux produits sont $-ab$ & $-bb$; je change leurs signes & j'écris $+ab$, $+bb$ sous les parties restantes du dividende. Je fais la réduction en effaçant les parties semblables & de signe contraire: comme il ne reste rien, j'en conclus que le quotient est $a - b$.

On auroit pu également ordonner le dividende & le diviseur par rapport à la lettre b , & alors on auroit eu $-bb + aa$ à diviser par $b + a$, ce qui en opérant de la même manière, auroit donné $-b + a$ pour quotient, quantité qui est la même que $a - b$.

Avant que de passer à l'exemple qui suit, il est à propos que les Commençans s'exercent sur les exemples de la Table ci-jointe, page 33.

37. Si après avoir ordonné le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, il se trouvoit plusieurs termes dans lesquels cette lettre eût le même exposant, on disposeroit ceux-ci dans une même colonne verticale, comme on le voit dans l'exemple suivant; & dans cette disposition, on observeroit d'ordonner tous les termes de chaque colonne par rapport à une même autre lettre.

E X E M P L E.

On propose de diviser $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, par $-3ab - 5a^2 + bb$. J'ordonne le dividende & le diviseur, par rapport à la lettre a , ce qui me donne $-20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ à diviser par $-5a^2 - 3ab + bb$; mais comme il y a deux termes affectés de a^3 , deux termes affectés de a^2 , & deux termes affectés de a , je les dispose comme on le voit ici, en ordonnant dans chaque colonne, par rapport à la lettre b .

$$\begin{array}{r}
 \text{Divid. } \left\{ \begin{array}{l} -20a^4 + 13a^3b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ + 20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + bb \text{ Divif.} \\ 4a^2 - 5ab + 2ac \text{ Quot.} \end{array} \\
 \hline
 \text{Reste. } \dots \left\{ \begin{array}{l} +25a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ -25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Reste } \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ +10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Reste. } \dots \dots \dots 0
 \end{array}$$

Je procède ensuite à l'opération, en divisant $-20a^4$ premier terme du dividende, par $-5a^2$ premier terme du diviseur. Cette opération faite suivant les règles ci-dessus, me donne pour quotient $+4a^2$ ou simplement $4a^2$, parce que c'est le premier terme; je l'écris au quotient.

Je multiplie les trois termes du diviseur, successivement par $4a^2$, & changeant les signes à mesure que je trouve ces produits, je les écris sous le dividende, ce qui me donne $20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2$ dont je fais la réduction avec les termes du dividende, & j'ai pour reste & pour nouveau dividende $+25a^3b - 10a^3c + 15a^2b^2 - 6a^2bc - 5ab^3 + 2ab^2c$.

Je continue la division en prenant $+25a^3b$ pour dividende, & je trouve pour quotient $-5ab$; j'écris ce quotient; je multiplie, par cette même quantité, les trois termes du diviseur; & changeant les signes à mesure que je les trouve, j'écris les produits sous mon nouveau dividende; j'ai $-25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3$, dont faisant la réduction avec les termes de ce même nouveau dividende; j'ai pour reste & pour troisième dividende $-10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c$.

Je passe à une troisième division en prenant $-10a^3c$ pour dividende: je trouve $+2ac$ pour quotient; je fais la multiplication, le changement de signes, & la réduction comme ci-devant, & il ne me reste rien; ainsi le quotient est $4a^2 - 5ab + 2ac$.

38. Il arrive souvent qu'une quantité résultant de plusieurs opérations différentes, peut être mise sous la forme d'un produit ou résultat de multiplication: lorsque

Exempl

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} a + \\ a + \\ \hline a^2 + \\ + ab + \\ \hline a^2 + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ \hline a^6 + 3a^5b + 3a^4b^2 + a^3b^3 \\ - 3a^5b - 9a^4b^2 - 9a^3b^3 - 3a^2b^4 + \\ + 3a^4b^2 + 9a^3b^3 + 9a^2b^4 + 3ab^5 \\ - a^3b^3 - 3a^2b^4 - 3ab^5 - b^6 \\ \hline a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 \end{array}$$

Exen

$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \end{array} \right. \\ - a^3 + a^2b \\ \hline + a^2b - b^3 \\ - a^2b + ab^2 \\ \hline + ab^2 - b^3 \\ - ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^4 + 2aabb + b^4 - c \\ - a^4 - aabb - aacc \\ \hline + aabb - aacc + \\ - aabb - b^4 - b \\ \hline - aacc - b \\ + aacc + b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45 \\ - 20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12 \\ \hline - 25a^4b + 30a^3b^2 - 33 \\ + 25a^4b - 20a^3b^2 + 25 \\ \hline + 10a^3b^2 - 8 \\ - 10a^3b^2 + 8 \end{array}$$

lorsque cela arrive , il est très-souvent utile de lui donner cette forme , en indiquant la multiplication entre ses facteurs. Quoique la méthode générale pour découvrir ces facteurs dépende de connaissances que nous ne donnerons que par la suite , néanmoins nous observerons que lorsqu'on s'est un peu familiarisé avec la multiplication & la division , on les apperçoit , dans beaucoup de cas , avec facilité. Par exemple , si on avoit à ajouter $5ab - 3bc + a^2$, avec $3ab + 3bc - 2a^2$, on auroit $8ab - a^2$ qui , à cause de la lettre a qui est facteur commun des deux termes $8ab$ & a^2 , peut être considéré comme étant venu de la multiplication de $8b - a$ par a , & peut être représenté par $(8b - a) \times a$. Il est utile de s'exercer à ces sortes de décompositions.

De la manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales.

39. La méthode pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales , est analogue à celle que nous avons donnée pour les nombres (*Arith.* 95). Il faut , après avoir ordonné les deux quantités par rapport à une même lettre , diviser celle où cette lettre a le plus grand exposant , par la seconde , & continuer la division jusqu'à ce que cet exposant y soit devenu moindre que dans la seconde , ou tout au plus égal. On divise ensuite la seconde , par le reste de cette division , & avec les mêmes conditions. On divise après cela , le premier reste par le

Marine, Algèbre.

C

second, & l'on continue de diviser le reste précédent par le nouveau, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une division exacte : alors le dernier diviseur qu'on aura employé, est le plus grand commun diviseur cherché. La démonstration est fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons donnée en Arithmétique, page 82.

Avant de mettre cette règle en pratique, nous ferons une observation qui peut en faciliter l'usage ; cette observation est, qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur des deux quantités, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre, & qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. Par exemple ab & ac ont pour commun diviseur a , si je multiplie ab par d , il deviendra abd qui n'a avec ac d'autre commun diviseur que a ; c'est-à-dire, le même qui étoit entre ab & ac .

Il n'en seroit pas de même, si je multipliois ab par un nombre qui fût diviseur de ac , ou qui eût un facteur commun avec ac ; par exemple, si je multipliois ab par c , il deviendrait abc , dont le diviseur commun avec ac est ac lui-même. Pareillement, si je multipliois ab par cd qui a un facteur commun avec ac , j'aurois $abcd$ dont le diviseur commun avec ac est ac .

40. Concluons de-là, 1°. que si en cherchant le plus grand commun diviseur de deux quantités, on s'apperçoit dans le cours des divisions que l'on fera successivement, que le dividende ou le diviseur ait un facteur ou diviseur qui ne soit point facteur de l'autre, on pourra supprimer ce facteur.

2°. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités,

par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de l'autre quantité, & n'ait aucun facteur commun avec elle.

Appliquons maintenant la règle & les remarques que nous venons de faire.

Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de $aa - 3ab + 2bb$ & $aa - ab - 2bb$. Je divise la première par la seconde : j'ai 1 pour quotient, & $-2ab + 4bb$ pour reste. Je vais donc diviser $aa - ab - 2bb$, par le reste $-2ab + 4bb$; mais comme celui-ci a pour facteur $2b$ qui n'est point facteur du nouveau dividende, je supprime ce facteur $2b$, & je me contente de chercher le commun diviseur de $aa - ab - 2bb$ & $-a + 2b$, c'est-à-dire, de diviser $aa - ab - 2bb$ par $-a + 2b$; la division se fait exactement. J'en conclus que $-a + 2b$ est le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées.

Proposons-nous pour second exemple, de trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ & $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Il faudroit donc diviser la première de ces deux quantités, par la seconde; mais comme 5 ne peut être divisé exactement par 7, je multiplierai la première par 7, qui n'étant point facteur de tous les termes de la seconde, ne peut rien changer au commun diviseur. J'aurai donc $35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$. En faisant la division, j'aurai $5a$ pour quotient, & pour reste $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$. Comme l'exposant de a dans celui-ci est encore égal à celui de a dans le diviseur, je puis continuer la division; mais j'observe qu'il faudra encore, par la même raison que ci-dessus, multiplier par 7: d'ailleurs

je remarque que je puis ôter b dans tous les termes de $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$, parce qu'il n'est point facteur commun de tous les termes du diviseur $7a^2 - 23ab + 6b^2$; j'aurai donc, d'après ces observations, $-77a^2 + 329ab - 294b^2$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$; faisant la division, j'ai -11 pour quotient, & $76ab - 228b^2$ pour reste. Je vais donc diviser $7a^2 - 23ab + 6b^2$, qui m'a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste $76ab - 228b^2$, ou plutôt par $76a - 228b$. Pour que la division pût se faire, il faudroit multiplier la première de ces deux quantités par 76; mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si 76 n'est pas facteur de toute la quantité $76a - 228b$, ou s'il n'a pas quelqu'un de ses facteurs qui en soit facteur commun. Or je remarque que 76 est 3 fois dans $228b$; & comme il n'est pas facteur de $7a^2 - 23ab + 6b^2$, je supprime dans le diviseur $76a - 228b$, le facteur 76, & j'ai $7a^2 - 23ab + 6b^2$ à diviser par $a - 3b$ seulement; la division faite, il ne reste rien; d'où je conclus que le commun diviseur des deux quantités proposées, est $a - 3b$.

Des Fractions littérales.

41. Les fractions littérales se calculent suivant les mêmes règles que les fractions numériques, mais en appliquant en même temps les règles que nous avons données ci-dessus concernant l'addition, la soustraction, la multiplication & la division. Comme cette application est facile, nous la ferons très-sommairement.

42. La fraction $\frac{a}{b}$ peut être transformée, sans

changer de valeur, en $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{aa}{ab}$, ou $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, & ainsi de suite.

En effet, ces dernières ne sont autre chose que la première dont on a multiplié les deux termes, par c dans le premier cas, par a dans le second, & par $a + b$ dans le troisième, ce qui (*Arith.* 88) n'en change pas la valeur.

43. La fraction $\frac{aac}{abc}$ est la même chose que $\frac{a}{b}$; la fraction $\frac{6a^3 + 3a^2b}{12a^3 + 9a^2c}$ est la même que $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Cela est évident (*Arith.* 89), en divisant les deux termes de la troisième par ac , & les deux termes de la troisième, par $3a^2$. Au reste cette réduction des fractions à leur plus simple expression est comprise dans ce qui a été dit (33).

44. La règle générale & la plus sûre pour réduire une fraction quelconque à ses moindres termes, est de diviser les deux termes par leur plus grand commun diviseur que l'on trouve par ce qui a été dit (39).

45. Pour réduire à une seule fraction, une quantité composée d'un entier & d'une fraction, il faut, comme en Arithmétique, multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne. Par

exemple, $a + \frac{bd}{c}$, peut être changé en $\frac{ac + bd}{c}$.

De même, $a + \frac{cd - ab}{b - d}$, se réduit à $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$, en multipliant l'entier a par le dénominateur $b - d$.

Lorsqu'à la suite de ces opérations, il se trouve des termes semblables, il ne faut pas oublier de les réduire; ainsi dans le dernier exemple, la quantité $a + \frac{cd - ab}{b - d}$ a été changée en $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$ qui se réduit à $\frac{-ad + cd}{b - d}$ ou $\frac{cd - ad}{b - d}$, en effaçant les deux termes ab & $-ab$ qui se détruisent.

46. Pour tirer les entiers qu'une fraction littérale peut renfermer, cela se réduit comme en Arithmétique, à diviser le numérateur, par le dénominateur, autant qu'il est possible, & en suivant les règles données ci-dessus pour la division; ainsi la quantité $\frac{3ab + ac + cd}{a}$, peut être réduite à $3b + c + \frac{cd}{a}$; pareillement la quantité $\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$, se réduit à $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$, en faisant la division par $a + 2b$.

47. Pour réduire plusieurs fractions littérales, au même dénominateur, la règle est la même qu'en Arithmétique: ainsi pour réduire à un même dénominateur, les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, je multiplie les deux termes a & b de la première, par

df qui est le produit des dénominateurs des deux autres fractions, & j'ai $\frac{adf}{bdf}$. Je multiplie de même les deux termes c & d de la seconde, par bf produit des deux autres dénominateurs, & j'ai $\frac{bcf}{bdf}$; enfin je multiplie les deux termes e & f de la dernière, par bd produit des dénominateurs des deux autres, & j'ai $\frac{bde}{bdf}$, en sorte que les trois fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

On se conduiroit de la même manière, si les numérateurs ou les dénominateurs, ou tous les deux étoient complexes, mais en observant les règles de la multiplication des nombres complexes. C'est ainsi qu'on trouvera que les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ & $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, & $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, en multipliant les deux termes de la première par $a-b$, & les deux termes de la seconde par $a+b$.

48. Quand les dénominateurs ont un diviseur ou facteur commun, on peut réduire les fractions à un même dénominateur, plus simplement que par la règle générale: par exemple, si j'avois les deux fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$; je vois que les deux dénominateurs seroient les mêmes si f étoit facteur du premier, & c

facteur du second ; je multiplie donc les deux termes de la première fraction par f , & les deux termes de la seconde, par c ; ce qui me donne $\frac{af}{bcf}$ & $\frac{cd}{bcf}$ plus simples que $\frac{abf}{bbcf}$ & $\frac{bcd}{bbcf}$ que j'aurois eues en suivant la règle générale. Si j'avois les trois fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$; je vois que si fg étoit facteur du dénominateur de la première ; cg , de celui de la seconde ; & bf , de celui de la troisième, les trois fractions auroient le même dénominateur ; je multiplie donc les deux termes de la première, par fg ; les deux termes de la seconde, par cg ; & les deux termes de la troisième par bf ; & j'ai $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{d cg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

On peut appliquer cela aux nombres, en les décomposant en leurs facteurs. Par exemple $\frac{5}{12}$ & $\frac{3}{16}$ sont la même chose que $\frac{5}{4 \times 3}$ & $\frac{3}{4 \times 4}$; je multiplie donc les deux termes de la première par 4, & les deux termes de la seconde par 3, & j'ai $\frac{20}{48}$ & $\frac{9}{48}$.

49. A l'égard de l'addition & de la soustraction, lorsqu'on a réduit les fractions au même dénominateur, il ne s'agit plus que de faire l'addition ou la soustraction des numérateurs. Ainsi les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ & $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, ont donné ci-dessus $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ &

$\frac{aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$; si donc on veut ajouter , on aura $\frac{ab + ac - bb - bc + aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$ qui se réduit à $\frac{2ab - ac - bb - 3bc + aa}{aa - bb}$. Au contraire , si l'on veut retrancher la seconde de la première , on aura $\frac{ab + ac - bb - bc - aa + 2ac - ab + 2bc}{aa - bb}$ qui se réduit à $\frac{3ac - bb + bc - aa}{aa - bb}$.

50. Remarquons en passant que , pour retrancher la seconde fraction , nous avons changé les signes du numérateur seulement : Si l'on changeoit les signes du numérateur & du dénominateur en même temps , on ne changeroit point la fraction , & par conséquent , au lieu de la retrancher , on l'ajouteroit ; en effet $\frac{a}{b}$ est la même chose que $\frac{-a}{-b}$ selon la règle qui a été donnée (36).

51. Pour multiplier $\frac{a}{b}$, par $\frac{c}{d}$; on écrira $\frac{ac}{bd}$; en multipliant numérateur par numérateur , & dénominateur par dénominateur , conformément aux règles de l'Arithmétique ; de même $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ donnera $\frac{1}{4}ab$.

Si l'on avoit $\frac{a}{b}$ à multiplier par c , on pourroit considérer c , comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui ramène cette multiplication au cas précédent , & donne $\frac{ac}{b}$; mais on voit que cela se réduit à multiplier le

numérateur par l'entier c ; nous prendrons donc pour règle dorénavant , celle-ci , *pour multiplier une fraction par un entier , ou un entier par une fraction , il faut multiplier le numérateur par l'entier , & conserver le même dénominateur.*

Si le numérateur & le dénominateur étoient complexes , on leur appliqueroit la règle de la multiplication des nombres complexes.

§ 2. Pour diviser $\frac{a}{b}$, par $\frac{c}{d}$; l'opération (*Arith.* 109) se réduit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui s'exécute par la règle précédente , & donne $\frac{a d}{b c}$. Et pour diviser $\frac{a+b}{c+d}$, par $\frac{c+d}{a-b}$, cela se réduit à multiplier $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{a-b}{c+d}$, ce qui donne $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$ ou $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$ ou , en faisant la multiplication indiquée dans le numérateur , $\frac{a a - b b}{(c+d)^2}$.

Enfin , si l'on avoit $\frac{a}{b}$ à diviser par c , on pourroit considérer c , comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui ramèneroit au cas précédent , & réduiroit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{1}{c}$, ce qui donne $\frac{a}{b c}$; d'où l'on voit que *pour diviser une fraction par un entier , il faut multiplier le dénominateur par l'entier , & conserver le numérateur.*

Des Équations.

53. Pour marquer que deux quantités sont égales, on les sépare l'une de l'autre par ce signe $=$, qui se prononce par le mot *égale*, ou par les mots *est égal à*; ainsi cette expression $a = b$, se prononceroit en disant *a égale b*, ou *a est égal à b*.

L'assemblage de deux ou de plusieurs quantités séparées ainsi par le signe $=$, est ce qu'on appelle une *Équation*. La totalité des quantités qui sont à la gauche du signe $=$, forme ce qu'on appelle le *premier membre* de l'équation; & la totalité de celles qui sont à la droite de ce même signe, forme le *second membre*. Dans l'équation $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ forme le premier membre, & $2x + 7$ forme le second. Les équations sont d'un très-grand usage pour la résolution des questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, renferme toujours dans son énoncé, soit explicitement, soit implicitement, un certain nombre de conditions qui sont autant de moyens de saisir les rapports des quantités inconnues, aux quantités connues dont celles-là dépendent. Ces rapports peuvent toujours, ainsi qu'on le verra par la suite, être exprimés par des équations dans lesquelles les

quantités inconnues & les quantités connues se trouvent combinées les unes avec les autres, & cela d'une manière plus ou moins composée, selon que la question est plus ou moins difficile.

Ainsi pour résoudre, par Algèbre, les questions qu'on peut proposer sur les quantités, il faut trois choses.

1°. Saisir dans l'énoncé ou dans la nature de la question, les rapports qu'il y a entre les quantités connues & les quantités inconnues. C'est une faculté que l'esprit acquiert, comme beaucoup d'autres, par l'usage ; mais il n'y a point de règles générales à donner là-dessus.

2°. Exprimer chacun de ces rapports, par une équation. Cette condition peut être réduite à une seule règle, que nous exposerons par la suite ; mais l'application en est plus ou moins facile selon la nature des questions, la capacité & l'exercice que peut avoir celui qui entreprend de résoudre.

3°. Résoudre cette équation, ou ces équations, c'est-à-dire, en déduire la valeur des quantités inconnues. Ce dernier point est susceptible d'un nombre déterminé de règles : c'est par lui que nous allons commencer.

Comme les questions qu'on peut avoir à résoudre,

peuvent conduire à des équations plus ou moins composées , on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou degrés que l'on distingue par l'exposant de la quantité ou des quantités inconnues qui s'y trouvent : nous ferons connoître ces équations à mesure que nous avancerons : celles dont nous allons nous occuper d'abord , sont les *équations du premier degré*. On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes , ni entre elles.

Des Équations du premier degré , à une seule inconnue.

54. Résoudre une équation , c'est la réduire à une autre , dans laquelle l'inconnue , ou la lettre qui la représente , se trouve seule dans un membre , & où il n'y ait plus que des quantités connues dans l'autre membre.

Par exemple , si l'on proposoit cette question , *Trouver un nombre dont le quadruple ajouté à 3 , donne autant que son triple ajouté à 12*. En représentant ce nombre par x , son quadruple seroit $4x$, lequel ajouté à 3 fait $4x + 3$; d'un autre côté le triple de ce même nombre x est $3x$, lequel ajouté à 12 fait $3x + 12$; puis donc que $4x + 3$ doit donner autant que $3x + 12$, il faut que le nombre x soit

tel que l'on ait $4x + 3 = 3x + 12$; c'est-là l'équation qu'il s'agit de résoudre , pour trouver le nombre demandé.

Or il est évident que puisque les deux quantités séparées par le signe $=$, sont égales , elles le seront encore , si l'on retranche de chacune $3x$, ce qui réduit l'équation à $x + 3 = 12$; enfin ces deux-ci seront encore égales ; si de chacune on retranche le même nombre 3 , ce qui donne $x = 9$, & résout la question ; car il est évident que x est connu , puisqu'il est égal à une quantité connue 9.

L'objet que nous nous proposons ici est de donner des règles pour ramener l'équation , dans tous les cas , à avoir ainsi l'inconnue seule dans un membre , & n'avoir que des quantités connues dans l'autre membre. Pour une question aussi simple que celle que nous venons de prendre pour exemple , l'usage des équations seroit sans doute superflu ; mais toutes les questions ne sont pas de cette facilité ; & il ne s'agit encore que de faire entendre , comment l'équation est résolue , lorsque l'inconnue est seule dans un membre , & qu'il n'y a plus que des quantités connues dans l'autre.

Les règles pour résoudre les équations dont il s'agit ici , c'est-à-dire , pour les réduire à avoir l'inconnue seule dans un membre , se réduisent à

trois qui sont relatives aux trois différentes manières dont l'inconnue peut se trouver mêlée ou engagée avec des quantités connues.

Dorénavant nous représenterons les quantités inconnues par quelques-unes des dernières lettres x , y , z de l'Alphabet, pour les distinguer des quantités connues que nous représenterons, ou par des nombres, ou par les premières lettres de l'Alphabet.

55. L'inconnue peut se trouver mêlée avec des quantités connues, en trois manières ; 1°. par addition ou soustraction, comme dans l'équation $x + 3 = 5 - x$. 2°. Par addition, soustraction & multiplication, comme dans l'équation $4x - 6 = 2x + 16$. 3°. Enfin par addition, soustraction, multiplication & division, comme dans l'équation $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{5}{7}x + 17$; ou par ces deux dernières opérations seulement, ou par la dernière seulement.

Voici les règles qu'il faut suivre pour dégager l'inconnue dans ces différens cas.

56. *Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre de cette équation dans l'autre ; il faut effacer ce terme, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire à celui qu'il a dans le membre où il est.* Sur quoi il faut se rappeler qu'un terme qui n'a pas de signe, est censé avoir le signe $+$.

Par exemple, dans l'équation $4x + 3 = 3x + 12$, si je veux faire passer le terme $+ 3$ dans le second membre, j'écris $4x = 3x + 12 - 3$, où l'on voit que le terme 3 n'est plus dans le premier membre; mais il est dans le second avec le signe $-$, contraire au signe $+$ qu'il avoit dans le premier.

Cette équation réduite, revient à $4x = 3x + 9$; si l'on veut maintenant faire passer le terme $3x$, dans le premier membre, on écrira $4x - 3x = 9$, qui en réduisant, devient $x = 9$.

Pareillement, si dans l'équation $5x - 7 = 21 - 4x$, je veux faire passer le terme $- 7$ dans le second membre, j'écrirai $5x = 21 - 4x + 7$, qui se réduit à $5x = 28 - 4x$; si je veux ensuite faire passer $4x$, j'écrirai $5x + 4x = 28$, ou, en réduisant, $9x = 28$. Nous verrons, dans quelques momens, comment s'achève la résolution de cette équation.

La raison de cette règle est bien facile à saisir. Puisque les quantités qui composent le premier membre, sont, ensemble, égales à la totalité de celles qui composent le second, il est évident qu'on ne trouble point cette égalité, si ayant ajouté ou ôté à l'un des membres un terme quelconque, on ajoute ou l'on ôte à l'autre, ce même terme; or, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $+$, c'est diminuer le membre où il se trouve; il faut donc diminuer l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire, y écrire ce terme avec le signe $-$. Au contraire, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $-$, il est évident qu'on augmente le membre où il se trouve;

il

il faut donc augmenter l'autre, de pareille quantité, c'est-à-dire, y écrire ce terme avec le signe +.

57. On voit donc que par cette règle on peut faire passer, à la fois, dans un même membre, tous les termes affectés de l'inconnue, & toutes les quantités connues dans l'autre. On choisira d'abord dans quel membre on veut avoir les termes affectés de l'inconnue; cela est indifférent: je suppose que ce soit dans le premier. On écrira de nouveau l'équation, en observant de conserver aux termes affectés de l'inconnue, & qui étoient dans le premier membre, les signes qu'ils avoient; on écrira, à la suite de ceux-là, les termes affectés de l'inconnue, qui se trouvent dans l'autre membre, mais en observant de changer leur signe: à la suite de tous ces termes, on écrira le signe $=$, & l'on formera le second membre, en écrivant les quantités connues qui composoient d'abord le second membre, en les écrivant, dis-je, avec les mêmes signes qu'elles avoient, & ensuite les quantités connues qui étoient dans le premier membre, mais en leur donnant des signes contraires à ceux qu'elles avoient. C'est ainsi que l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ devient $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Pareillement l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, devient $ax - cx + bx = ac - bc$.

Marine. Algèbre.

D

58. Il peut arriver , par cette transposition , que ce qui reste des x , après la réduction , se trouve avoir le signe — ; par exemple , si l'on avoit $3x - 8 = 4x - 12$; en passant tous les x dans le premier membre , on auroit $3x - 4x = -12 + 8$, qui se réduit à $-x = -4$; alors , il n'y a qu'à changer les signes de l'un & de l'autre membre , ce qui , dans le cas présent , donne $+x = +4$ ou $x = 4$. En effet , on étoit également maître de transposer les x dans le second membre , ce qui auroit donné $-8 + 12 = 4x - 3x$, qui se réduit à $4 = x$, qui est la même chose que $x = 4$.

59. On peut souvent abrégér la réduction de l'équation , lorsqu'elle est numérique , ou lorsqu'étant littérale , elle renferme des quantités semblables. Si ces quantités ont le même signe dans différens membres , on efface l'une , & on diminue l'autre de pareille quantité ; au contraire , on les ajoute , lorsqu'elles ont différens signes. Par exemple , dans l'équation $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, j'efface $2x$ dans le premier membre , & j'écris seulement x dans le second ; j'efface $5a$ dans le second , & j'augmente $4a$ de $5a$, ce qui me donne tout de suite $6b - 9a = x$. On voit donc que s'il se trouvoit de part & d'autre , des termes parfaitement égaux & de même signe , on pourroit les supprimer tout de suite ; c'est ainsi que l'équation

$5a + 2b = 5a + x$, se réduit tout de suite à $2b = x$.

60. Lorsqu'on a passé dans un membre, tous les termes affectés de l'inconnue, & toutes les quantités connues dans l'autre membre; s'il n'y a point de fractions dans l'équation, il ne s'agit plus que d'exécuter la règle suivante, pour avoir la valeur de l'inconnue. *Écrivez l'inconnue seule dans un membre, & donnez pour diviseur au second membre, la quantité qui multiplioit l'inconnue dans le premier.*

Par exemple, dans l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ que nous avons traitée ci-dessus, nous avons eu, par la transposition & la réduction, $11x = 22$; pour avoir x , je n'ai autre chose à faire qu'à écrire $x = \frac{22}{11}$, qui se réduit à $x = 2$; c'est-à-dire, écrire x seul dans le premier membre, & faire servir son multiplicateur 11, de diviseur au second membre 22. En effet, lorsqu'au lieu de $11x$, j'écris seulement x , je n'écris que la onzième partie du premier membre; il faut donc, pour conserver l'égalité, n'écrire que la onzième partie du second membre, c'est-à-dire, diviser le second membre par 11.

Pareillement, si l'on proposoit l'équation $12x - 15 = 4x + 25$; après avoir passé (56) tous les x d'un côté, & les quantités connues de l'autre, on aura $12x - 4x = 25 + 15$ ou, en réduisant, $8x = 40$; maintenant pour avoir x , j'écris $x = \frac{40}{8}$, qui se réduit à $x = 5$. Car, lorsqu'au lieu de $8x$ j'écris x seulement, je n'écris que la huitième partie du premier membre; je dois donc,

pour maintenir l'égalité, n'écrire que la huitième partie du second membre, c'est-à-dire, n'écrire que $\frac{40}{8}$.

Si les quantités connues qui multiplient x , au lieu d'être des nombres, étoient représentées par des lettres, la règle ne seroit pas différente pour cela : ainsi dans l'équation $ax = bc$, il n'y a autre chose à faire, pour avoir x , que d'écrire $x = \frac{bc}{a}$.

Si après la transposition faite, il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue, la règle est encore la même ; ainsi, dans l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, que nous avons eue ci-dessus, on a, après la transposition, $ax - cx + bx = ac - bc$; pour avoir x , il ne s'agit plus que d'écrire $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$; c'est-à-dire, écrire x seul dans un membre, & donner pour diviseur au second, la quantité qui multiplioit x dans le premier, laquelle est ici $a - c + b$, puisque la quantité $ax - cx + bx$ est x multiplié par la totalité des trois quantités $a - c + b$.

61. On voit donc que lorsqu'après la transposition, il y a plusieurs termes affectés de x , on doit pour avoir la valeur de x , diviser le second membre par la totalité des quantités qui affectent x dans le premier, en prenant ces quantités avec leurs signes tels qu'ils sont. Par exemple, dans l'équation $ax = bc - 2x$, on a, par la transposition, $ax + 2x = bc$;

& en appliquant la règle actuelle ou la division, on aura $x = \frac{bc}{a+2}$. De même, l'équation $x - ab = bc - ax$, donne par la transposition $x + ax = bc + ab$, & par conséquent $x = \frac{bc + ab}{1 + a}$; car il ne faut pas oublier ici (5) que le multiplicateur de x dans le premier terme de $x + ax$, est 1; en sorte que dans $x + ax$, x est multiplié par $1 + a$; en effet dans $x + ax$, x se trouve une fois de plus que dans ax .

62. S'il se trouvoit quelque quantité qui fût facteur commun de tous les termes de l'équation, on pourroit simplifier, en divisant tous les termes par ce facteur commun: par exemple, dans l'équation $15bb = 27ab + 6bx$, je diviserois par $3b$ qui est facteur commun de tous les termes; & j'aurois $5b = 9a + 2x$, qui, par la transposition, devient $5b - 9a = 2x$, & enfin par la division, donne $\frac{5b - 9a}{2} = x$ ou $x = \frac{5b - 9a}{2}$.

63. Les règles que nous venons de donner, ont toujours lieu, lors même que les différens termes de l'équation ont des dénominateurs, pourvu que ces dénominateurs ne contiennent pas l'inconnue; mais comme l'application de ces règles est plus facile pour les Commençans, lorsqu'il n'y a pas de

fractions dans l'équation , nous allons ajouter ici une règle pour faire disparaître les dénominateurs.

64. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs , en une autre dans laquelle il n'y en ait plus , *il faut multiplier chaque terme qui n'a pas de dénominateur , par le produit de tous les dénominateurs ; & multiplier le numérateur de chaque fraction , par le produit des dénominateurs des autres fractions seulement.*

Par exemple , si j'avois l'équation $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$; je multiplierois le numérateur $2x$ de la fraction $\frac{2x}{3}$, par 35 , produit des deux dénominateurs 5 & 7 , ce qui me donneroit $70x$. Je multiplierois le terme 4 , qui n'a point de dénominateur , par 105 produit des trois dénominateurs 3 , 5 , 7 , ce qui me donneroit 420 . Je multiplierois le numérateur $4x$ de la fraction $\frac{4x}{5}$, par 21 , produit des deux dénominateurs 3 & 7 , & j'aurois $84x$. Je multiplierois 12 , qui n'a pas de dénominateur , par le produit 105 des trois dénominateurs , & j'aurois 1260 . Enfin je multiplierois le numérateur $5x$ de la fraction $\frac{5x}{7}$, par 15 , produit des deux autres dénominateurs , ce qui me donne $75x$; enforte que l'équation proposée , est changée en celle-ci $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, dans laquelle , pour avoir x , il ne s'agit plus que d'appliquer les deux règles précédentes. Par la première (56) on changera cette équation en $70x - 84x + 75x = 1260 -$

420; ou, en réduisant, $61x = 840$; & par la seconde (60), $x = \frac{840}{61}$, qui en faisant la division, se réduit à $x = 13 \frac{47}{61}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, si l'on se rappelle ce qui a été dit (*Arith.* 91) pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur. En effet, si dans l'équation proposée $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, on vouloit réduire au même dénominateur, les trois fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, il faudroit multiplier leurs numérateurs par les mêmes nombres par lesquels notre règle actuelle prescrit de les multiplier, & donner à ces nouveaux numérateurs, pour dénominateur commun, le produit de tous les dénominateurs; en sorte que l'équation proposée seroit changée en cette autre $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, qui est la même dans le fond, puisque (*Arith.* 88) les nouvelles fractions sont les mêmes que les premières. Maintenant, si nous voulons aussi réduire les entiers en fraction, il faut (*Arith.* 86) multiplier ces entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, c'est-à-dire, ici par 105 qui a été formé du produit de tous les dénominateurs qui se trouvent dans l'équation; alors on aura $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$;

mais il est évident qu'on peut , sans troubler l'égalité , supprimer de part & d'autre le dénominateur commun , puisque si ces deux quantités sont égales étant divisées par un même nombre , elles doivent l'être aussi sans cette division ; on a donc alors $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, comme ci-dessus.

65. Si les différens termes qui composent l'équation , sont tous des quantités littérales , la règle ne fera pas , pour cela , différente. Il faut seulement observer les règles de la multiplication des quantités littérales : ainsi dans l'équation $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, je multiplie le numérateur ax par le produit cd des deux autres dénominateurs , ce qui donne $acd x$. Je multiplie le terme $+b$, par le produit bcd de tous les dénominateurs , & j'ai $+b^2cd$. Je multiplie cx par bc , & j'ai bc^2x ; enfin je multiplie ab par bd , & j'ai ab^2d ; enforte que l'équation devient $acd x + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, laquelle , par transposition , donne $acd x - bc^2x = ab^2d - b^2cd$, & par division (61) $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

66. Lorsque les dénominateurs sont complexes , on peut, pour soulager l'esprit , commencer par indiquer seulement les opérations , pour les exécuter ensuite ; ce qui est plus facile en les voyant ainsi

indiquées: par exemple, si j'avois $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$;
 j'écrirois $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b)$
 $= cx \times (a-b)$; alors faisant les opérations indiquées,
 j'aurois $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx$
 $- bcx$; transposant, $3a^2x + abx - acx + bcx$
 $= 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; & enfin en divisant (61)
 $x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

*Application des principes précédens à la
 résolution de quelques questions simples.*

67. Quoique nous nous soyions proposé de ne traiter avec quelque détail des usages de l'Algèbre, que dans la seconde section, nous croyons néanmoins à propos de préparer à ces usages, en appliquant dès à présent les principes précédens, à quelques questions assez faciles. Cela nous donnera lieu, d'ailleurs, de faire quelques remarques utiles pour la suite.

Les règles que nous venons de donner, sont suffisantes pour résoudre toute question du premier degré, lorsqu'une fois elle est exprimée par une équation. Pour mettre une question en équation, on peut faire usage de la règle suivante; *Représentez la quantité ou les quantités cherchées, chacune par une lettre; & ayant examiné avec attention, l'état de la question, faites, à*

l'aide des signes algébriques, sur ces quantités & sur les quantités connues, les mêmes opérations & les mêmes raisonnemens que vous feriez, si, connoissant les valeurs des inconnues, vous vouliez les vérifier.

Cette règle est générale, & conduira toujours à trouver les équations que la question peut fournir. Mais il est bon d'en diriger l'application par quelques exemples.

Question première : Un père & un fils ont cent ans à eux deux : le père a 40 ans plus que le fils : on demande quel est l'âge de chacun ?

Avec une attention médiocre, on voit que la question se réduit à celle-ci : Trouver deux quantités qui réunies fassent 100, & dont l'une surpasse l'autre de 40. Or il est facile de voir que dès que l'une de ces quantités sera connue, la seconde le sera aussi, puisque, si la plus grande, par exemple, étoit connue, il ne s'agiroit que d'en ôter 40 pour avoir la plus petite.

Je représente donc la plus grande par x .

Maintenant, si connoissant la valeur de x ; je voulois la vérifier, j'en retrancherois 40 pour avoir le plus petit nombre ; je réunirois ensuite le plus grand & le plus petit, pour voir s'ils composent 100. Imitons donc ce procédé.

Le plus grand nombre est.	x
Le plus petit sera donc.	$x - 40$
Ces deux nombres réunis font.	$2x - 40$
Or, par les conditions de la ques-	
tion, ils doivent faire.	100
Donc.	$2x - 40 = 100$

Il ne s'agit plus, pour avoir x , que d'appliquer les règles données (56 & 60). La première donne $2x = 100 + 40$ ou $2x = 140$, & la seconde $x = \frac{140}{2} = 70$; ayant trouvé le plus grand nombre x , j'en retranche 40 pour avoir le plus petit, & j'ai 30 pour celui-ci. Ainsi les deux âges demandés sont 70 & 30.

En réfléchissant sur la manière dont nous nous sommes conduits pour résoudre cette question, on peut voir que les raisonnemens que nous avons employés, ne sont point dépendans des valeurs particulières des nombres 100 & 40 qui entrent dans cette question; & que si, au lieu de ces nombres, on en eût proposé d'autres, il eût fallu se conduire de même. Ainsi si l'on proposoit la question de cette manière générale : *Deux nombres réunis font une somme connue & représentée par a ; ces deux nombres diffèrent entre eux d'un nombre connu représenté par b : comment trouverois-je ces deux nombres?*

Ayant représenté le plus grand par. x

Le plus petit sera donc $x - b$.

Ces deux nombres réunis font. $2x - b$.

Or selon la question, ils doivent composer le nombre a ; il faut donc que $2x - b = a$.

Transposant, on a $2x = a + b$, & divisant $x = \frac{a + b}{2}$ ou $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

C'est-à-dire, que pour avoir le plus grand, il faut prendre la moitié de a , & y ajouter la moitié de b ; ce qui m'apprend que, lorsque je connoîtrai la somme a de deux nombres inconnus, & leur différence b , j'aurai le plus grand de ces deux nombres inconnus en prenant la moitié de la somme, & y ajoutant la moitié de la différence.

Puisque le plus petit des deux nombres est $x - b$, il fera donc $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, ou, en réduisant tout en une seule fraction (45), il sera $\frac{a + b - 2b}{2}$; c'est-à-dire, $\frac{a - b}{2}$ ou $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; donc pour avoir le plus petit, il faut ôter la moitié de b , de la moitié de a ; c'est-à-dire, retrancher la moitié de la différence, de la moitié de la somme.

On voit par-là, comment en représentant d'une manière générale, c'est-à-dire, par des lettres, les quantités connues qui entrent dans ces questions, on parvient à trouver des règles générales pour la résolution de toutes les questions de même espèce. Cette règle que nous venons de trouver, est celle que nous avons donnée (*Géom.* 301).

Souvent des questions paroissent différentes au premier coup d'œil, & cependant après un léger examen, on trouve qu'elles ne diffèrent que par l'énoncé. Par exemple, si l'on proposoit cette question :

Partager un nombre connu & représenté par a, en deux parties, dont l'une soit moindre ou plus grande que l'autre, d'une quantité connue & représentée par b. Il est facile de voir que cette question revient au même que la précédente.

Question seconde : *Partager le nombre 720 en trois parties, dont la plus grande surpasse la plus petite de 80, & dont la moyenne surpasse la plus petite de 40.*

Si l'on me disoit quelle est la plus petite partie, pour la vérifier, j'y ajouterois 40 d'une part, ce qui me donneroit la seconde, & 80 d'une autre part, ce qui donneroit la plus grande; alors réunissant ces trois parties, il faudroit que leur somme formât 720.

Nommons donc cette plus petite partie, x ; & en procédant de la même manière, nous dirons :

La plus petite partie est. x
 Donc la moyenne est. $x + 40$
 Et la plus grande. $x + 80$

Or ces 3 parties réunies font. $3x + 120$;
 D'ailleurs la question exige qu'elles
 fassent. 720;

Il faut donc que $3x + 120 = 720$.

Appliquant les règles ci-dessus, on aura $3x = 720 - 120$
 ou $3x = 600$, & par conséquent $x = 200$; donc la se-
 conde partie est 240; & la plus grande, 280; ces trois
 parties réunies font en effet 720.

Il est encore évident, dans cet exemple, que quand les
 nombres proposés, au lieu d'être 720, 40 & 80, eussent
 été différens, la question auroit toujours pu se résoudre de
 la même manière; ainsi pour résoudre toutes les questions
 dans lesquelles il s'agit de partager un nombre connu a en
 trois parties, telles que l'excès de la plus grande sur la
 plus petite soit un nombre connu & représenté par b , &
 que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit c ; en
 raisonnant de même, on dira :

Représentons la plus petite, par. x
 La moyenne sera. $x + c$
 Et la plus grande. $x + b$

Ces trois parts réunies font. $3x + b + c$

Or elles doivent valoir. a

Il faut donc que. $3x + b + c = a$

Donc transposant $3x = a - b - c$, &

divisant, $x = \frac{a - b - c}{3}$.

C'est-à-dire, que pour avoir la plus petite, il faut retrancher du nombre qu'il s'agit de partager, les deux excès, & prendre le tiers du reste : alors les deux autres sont faciles à trouver. Ainsi, si l'on demande de partager 642 en trois parties dont la moyenne surpasse la plus petite de 75, & dont la plus grande surpasse la plus petite de 87; j'ajouterois les deux différences 75 & 87, ce qui me donneroit 162; retranchant 162 de 642, il reste 480, dont le tiers 160 est la plus petite part. Les deux autres sont donc $160 + 75$ ou 235, & $160 + 87$ ou 247.

Au reste, les deux questions que nous venons de donner pour exemples, n'ont pas besoin du secours de l'Algèbre; mais leur simplicité est propre à faire voir clairement la manière dont on doit faire usage du principe que nous avons donné pour mettre une question en équation.

Question troisième : *Partager un nombre connu, par exemple 14250, en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 3, 5 & 11; c'est-à-dire, dont la première soit à la seconde :: 3 : 5, & dont la première soit à la troisième :: 3 : 11.*

Si je connoissois l'une des parties, la première, par exemple, voici comment je la vérifierois.

Je chercherois par une règle de trois (*Arith.* 194) un nombre qui fût à cette première partie :: 5 : 3; ce seroit la seconde partie. Je chercherois, de même, un autre nombre qui fût à cette première partie :: 11 : 3; ce seroit la troisième partie; réunissant ces trois parties, elles devroient former 14250. Imitons donc ce procédé.

Soit la première part. x

Pour trouver la seconde, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 5 :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde partie, sera donc $\frac{5x}{3}$.

Pour trouver la troisième, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 11 :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième partie, sera donc $\frac{11x}{3}$.

Ces trois parts réunies font $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, ou $x + \frac{16x}{3}$;

Mais la question exige qu'elles fassent 14250 ; il faut donc que $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Pour avoir la valeur de x , je fais (64) disparaître le dénominateur 3, & j'ai $3x + 16x = 42750$, ou $19x = 42750$; donc (60) en divisant par 19, $x = \frac{42750}{19} = 2250$. La seconde part qui est $\frac{5x}{3}$, sera donc $\frac{5 \times 2250}{3}$, ou $\frac{11250}{3}$, ou 3750 ; & la troisième qui est $\frac{11x}{3}$, sera $\frac{11 \times 2250}{3}$, ou $\frac{24750}{3}$, ou 8250 ; ces trois parts réunies forment en effet 14250 ; d'ailleurs les trois nombres 2250, 3750, 8250, sont entre eux comme les trois nombres 3, 5 & 11, ce qu'il est facile de voir en divisant les trois premiers, par le même nombre 750, ce qui (*Arith.* 170) ne change point leur rapport.

Si le nombre qu'on propose de partager, au lieu d'être 14250, étoit tout autre ; s'il étoit en général représenté par a , & que les nombres proportionnels aux parties en lesquelles on veut le partager, au lieu d'être 3, 5, 11, fussent en général trois nombres connus & représentés par les lettres m , n , p ; il est visible qu'il ne faudroit qu'imiter ce que nous venons de faire.

Ainsi, la première part étant représentée par . . . x

Pour avoir la seconde, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : n :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde part, seroit donc $\frac{nx}{m}$.

Et pour avoir la troisième, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : p :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième part, seroit donc $\frac{px}{m}$.

Les trois parts réunies feroient donc $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$,
ou $x + \frac{nx + px}{m}$; or elles doivent faire a ; il faut donc
que $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Chassant le dénominateur, on a $mx + nx + px = ma$,
& par conséquent (61) en divisant, $x = \frac{ma}{m + n + p}$; ce
qui nous donne lieu de faire remarquer l'utilité de l'Algèbre,
pour découvrir des règles de calcul.

Si l'on vouloit calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $m + n + p : m :: a ::$; il est visible (*Arith.* 179) que ce quatrième terme seroit $\frac{am}{m + n + p}$; & puisque nous trouvons que x est exprimé par la même quantité, concluons-en que, pour avoir x , il faut calculer le quatrième terme d'une proportion dont le premier est la somme des parties proportionnelles; le second, la première de ces parties; & le troisième est le nombre même qu'il s'agit de partager; ce qui est précisément la règle que nous avons donnée (*Arith.* 197).

Question quatrième : On a fait partir de Dreux, pour Brest, un courrier qui fait 2 lieues par heure. Huit heures après son départ, on en a fait partir un autre de Paris, pour Brest,

&

& celui-ci fait 3 lieues par heure. On demande où il rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux.

Si l'on me disoit combien le second courier doit faire de lieues pour attraper le premier, je vérifierois ce nombre en cette manière. Je chercherois combien le premier a dû faire de chemin pendant que le second a été en marche; & comme ils en doivent faire, en même temps, à proportion de leur vitesse, c'est-à-dire, à proportion du nombre de lieues qu'ils font par heure, je trouverois combien le premier a dû faire, en calculant le quatrième terme de cette proportion. $3 : 2 ::$ le nombre de lieues faites par le second, est au nombre de lieues que le premier aura faites dans le même temps. Ayant trouvé ce quatrième terme, j'y ajouterois le nombre de lieues que le premier courier a dû faire pendant les 8 heures qu'il avoit d'avance, & enfin les 17 lieues de Paris à Dreux, qu'il avoit aussi d'avance; & le tout devroit former le nombre de lieues que le second a faites. Conduisons-nous donc de la même manière en représentant par x , le nombre de lieues que fera le second courier.

Pour trouver le nombre de lieues que le premier fait pendant que le second fait x , je calcule le quatrième terme de cette proportion. $3 : 2 :: x :$; ce quatrième terme est $\frac{2x}{3}$; or pendant 8 heures, ce même premier courier a dû faire 16 lieues, à raison de 2 lieues par heure; & puisqu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux, si l'on réunit ces trois quantités, on aura $\frac{2x}{3} + 16 + 17$, ou $\frac{2x}{3} + 33$ pour le chemin qu'aura dû faire le second courier, lorsqu'il attrapera le premier. Puis donc, qu'on a supposé qu'alors il auroit fait x de lieues, il faut que $\frac{2x}{3} + 33 = x$.

Marine. Algèbre.

E

Il ne s'agit plus que d'avoir x par le moyen des règles données ci-dessus. Je chasse donc le dénominateur 3, & j'ai (64) l'équation $2x + 99 = 3x$; transposant tous les x dans le second membre & réduisant, j'ai $99 = x$; c'est-à-dire, que les deux couriers se rencontreront, lorsque le second courier aura fait 99 lieues, ou qu'ils se rencontreront à 99 lieues de Paris.

En effet, pendant que le second fera 99 lieues, le premier fera 66 lieues, puisqu'il fait 2 lieues pendant que le second en fait trois; or il a 16 lieues d'avance, par les 8 heures dont son départ précède celui du second, & il a de plus 17 lieues d'avance comme partant de Dreux; il sera donc alors à 99 lieues de Paris, c'est-à-dire, au même endroit que le second.

Avec un peu d'attention, on voit que quand on changeroit les nombres qui entrent dans cette question, la manière de raisonner & d'opérer n'en seroit pas, pour cela, différente. Représentons donc, en général, par a , l'intervalle des deux lieux de départ, qui étoit 17 lieues dans la question précédente: représentons par b , le nombre d'heures dont le départ du premier courier précède celui du second; par c le nombre de lieues que le premier fait par heure, & par d le nombre de lieues que fait le second par heure.

Si nous représentons toujours par x le nombre de lieues que le second courier doit faire pour rencontrer le premier, x sera encore composé de l'intervalle des deux lieux de départ, du chemin que le premier peut faire pendant le nombre b d'heures, & enfin du chemin que le premier fera pendant tout le temps que le second sera en marche.

Pour déterminer ce dernier chemin, j'observe que les

deux couriers marchant alors pendant le même temps, doivent faire du chemin à proportion de leurs vitesses, ainsi x étant le chemin que le second est supposé faire, j'aurai celui que fait le premier pendant ce temps, en calculant le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci $d : c :: x :$; ce quatrième terme sera donc $\frac{c \times x}{d}$ (*Arith.* 179) ou simplement $\frac{cx}{d}$. Or, puisque ce premier courrier est supposé faire le nombre c de lieues par heure, il a dû, dans le nombre b d'heures, en faire b de fois autant, c'est-à-dire, 8 fois si b vaut huit, 30 fois si b vaut trente; en général, il en doit faire autant qu'il y a d'unités dans $c \times b$ ou bc ; il en a donc fait une quantité exprimée par bc .

Réunissons donc maintenant le nombre de lieues $\frac{cx}{d}$, avec le nombre de lieues bc , & avec le nombre de lieues a , & le tout $\frac{cx}{d} + bc + a$ sera ce que le second courrier a dû faire; or on a supposé que x étoit ce qu'il a dû faire; donc $x = \frac{cx}{d} + bc + a$. Chassant le dénominateur, on a $dx = cx + bcd + ad$; transposant, $dx - cx = bcd + ad$; divisant enfin (61), on a $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qui donne la solution de toutes les questions de cette espèce, au moins tant qu'on suppose que les deux couriers vont du même côté, & que le départ du courier qui va le moins vite, précède celui du second.

Pour montrer l'usage de cette formule, reprenons l'exemple précédent, & rappelons-nous que, dans ce cas, a représente 17 lieues; c'est-à-dire, $a = 17^l$, $b = 8^h$, $c = 2^l$, $d = 3^l$. Alors la valeur générale de x devient $x =$

$\frac{17 \times 3 + 8 \times 2 \times 3}{3 - 2}$, c'est-à-dire, $x = \frac{51 + 48}{1} = 99$,
comme ci-dessus.

Tel est donc l'usage de ces solutions générales, qu'en y substituant à la place des lettres, les nombres qu'elles sont destinées à représenter, & faisant les opérations que la disposition & les signes de ces lettres indiquent, on trouve la résolution de toutes les questions particulières de même espèce.

Par exemple, si l'on proposoit cette autre question: *L'aiguille des heures d'une montre répond à 17 minutes, & celle des minutes répond à 24 minutes, c'est-à-dire, qu'il est 3^h 24^m: on demande à quel nombre d'heures & de minutes, ces deux aiguilles seront l'une sur l'autre.*

Puisque l'aiguille des heures & celle des minutes marchent en même temps, la quantité b par laquelle nous avons représenté ce dont le départ d'un des couriers précède celui du second est ici zéro. L'intervalle des deux lieux de départ est ici le chemin que l'aiguille des minutes a à faire pour venir de la vingt-quatrième division du cadran, à la dix-septième, c'est-à-dire, que $a = 53$ divisions: or, pendant que l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions, celle des heures n'en parcourt que 5; on a donc $c = 5$, $d = 60$. Puisque $b = 0$, je rejette de la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le terme bcd , ou $b \times cd$, parce que zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, fait toujours zéro. J'aurai donc, pour le cas présent $x = \frac{ad}{d - c}$; & en substituant pour a , d , c , leurs valeurs, $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57 \frac{45}{55} = 57 \frac{9}{11}$, c'est-à-dire, qu'il faudra que l'aiguille

des minutes parcourre encore 57 divisions & $\frac{2}{11}$, ainsi, puisqu'elle répondoit à la vingt-quatrième division, elle répondra à 81 divisions & $\frac{2}{11}$; ou, puisque 60 divisions font un tour, les deux aiguilles seront l'une sur l'autre à 21' $\frac{2}{11}$ de l'heure suivante, c'est-à-dire, 4^h 21' $\frac{2}{11}$.

L'avantage des solutions littérales sur les solutions numériques, ne consiste pas seulement en ce que, pour chaque question particulière, il ne s'agit plus que de substituer des nombres: souvent, par certaines préparations, on rend ces solutions susceptibles d'un énoncé simple & facile à retenir.

Par exemple, la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ que nous venons de trouver, est dans ce cas: la quantité d étant facteur commun des deux termes du numérateur, on peut écrire la valeur de x en cette manière, $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$;

or, sous cette forme, on peut reconnoître que la valeur de x est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $d - c : d :: a + bc :$; mais de ces trois termes, le premier, $d - c$, marque la différence des vitesses des deux couriers; le second, d , marque la vitesse du second courier; & le troisième, $a + bc$, est composé de l'intervalle a des deux lieux de départ, & de la quantité bc ou $c \times b$ qui exprime combien le premier courier fait de lieues pendant le nombre d'heures qu'il a d'avance; en sorte que $a + bc$ marque toute l'avance que le premier a sur le second; la résolution de la question peut donc se réduire à cet énoncé: Multipliez le chemin que le premier fait par heure, par le nombre d'heures qu'il a d'avance, & l'ayant ajouté à l'intervalle des deux lieux de départ, faites cette règle de trois... La différence des vitesses des deux couriers est à la vitesse du second, comme la somme

des deux nombres que vous venez d'ajouter, est à un quatrième terme : ce sera le nombre de lieues que le second courrier doit faire pour rencontrer le premier. Ainsi dans le premier exemple ci-dessus, le premier courrier ayant 8 heures d'avance, & faisant 2 lieues par heure, on a 16 lieues à ajouter à 17 lieues, intervalle des deux lieux de départ, ce qui donne 33. Je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $3 - 2 : 3 :: 33 :$, ou $1 : 3 :: 33 :$; ce quatrième terme est 99, comme ci-dessus.

68. Au reste, qu'il y ait des fractions ou qu'il n'y en ait point, c'est toujours la même règle. Par exemple, si le premier courrier faisoit 7 lieues en 4 heures; le second, 13 lieues en 5 heures: si le premier courrier avoit 15 heures d'avance, & qu'enfin l'intervalle des deux lieux de départ fût de 42 lieues; je dirois: Puisque le premier courrier fait sept lieues en 4 heures, c'est $\frac{7}{4}$ de lieues par heure; pareillement, pour le second, c'est $\frac{13}{5}$ de lieue par heure; donc pendant les 15 heures que le premier a d'avance, il doit, à raison de $\frac{7}{4}$ de lieue par heure, faire 15 fois $\frac{7}{4}$ de lieue ou $\frac{105}{4}$ de lieue, lesquels ajoutés à 42 lieues, font $42 + \frac{105}{4}$ ou $\frac{273}{4}$; je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; ce quatrième terme sera $\frac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou (*Arith.* 106) $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou (en réduisant les deux fractions inférieures, au même dénominateur), $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{32-35}{20}}$, ou $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{-3}{20}}$, ou (*Arith.* 109) $\frac{3549}{20} \times \frac{20}{17}$, ou enfin $\frac{3549}{17}$; car en omettant le facteur 20 qui doit multiplier le numérateur & le dénominateur, on ne change rien à la fraction. La valeur de $\frac{3549}{17}$ est $208 \frac{13}{17}$. C'est le nombre de lieues que le second courrier seroit obligé de faire.

Réflexions sur les quantités positives & les quantités négatives.

69. Lorsqu'on a ainsi résolu, d'une manière générale, toutes les questions d'une même espèce, on peut souvent faire usage de ces formules générales pour la résolution d'autres questions dont les conditions seroient tout opposées à celles qu'on a eu en vue de remplir : un simple changement de $+$ en $-$, ou de $-$ en $+$, dans les signes des quantités suffit souvent. Mais avant de faire connoître ce nouvel usage des signes, il faut les considérer sous un nouvel aspect.

Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes $+$ & $-$ n'ont représenté jusqu'ici que les opérations de l'addition & de la soustraction ; mais ils peuvent aussi représenter, dans plusieurs cas, la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres.

Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera cette quantité que par une lettre ou par un nombre, rien ne désignera quel est celui de ces deux aspects sous lequel on la considère. Par exemple, dans l'état d'un homme

qui auroit autant de biens que de dettes , le même nombre peut servir à exprimer la quantité numérique des unes & des autres ; mais ce nombre , tel qu'il soit , ne feroit point connoître la différence des unes aux autres. Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence , c'est de les désigner par un signe qui indique l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre ; or l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions , il est naturel de désigner celles-là en leur appliquant le signe —.

Pareillement, si l'on regarde une ligne droite (*fig. 1*), comme engendrée par le mouvement d'un point *A* mû perpendiculairement à la ligne *BC*, on voit que ce point pouvant aller ou de *A* vers *D*, ou de *A* vers *E*, si l'on représente par *a* le chemin *AD* ou *AE* qu'il a fait, on ne détermine pas encore absolument la situation de ce point. Le moyen de la fixer, est d'indiquer par quelque signe, si la quantité *a* doit être considérée à droite ou à gauche ; or les signes + & — sont propres à cet effet ; car si l'on estime le mouvement du point *A* à l'égard d'un point *L* connu & regardé comme terme fixe ; lorsque le point *A* se meut vers *D*, ce qu'il décrit tend à augmenter *LA* ; & lorsqu'il se meut vers *E*, ce qu'il décrit tend au contraire à diminuer *LA* ; il est donc naturel de représenter *AD* par + *a* ou

simplement par a , & au contraire, de représenter AE par $-a$. Ce seroit tout le contraire, si au lieu de rapporter le mouvement du point A , au point L , on l'avoit rapporté au point O .

Les quantités négatives ont donc une existence aussi réelle que les positives, & elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute contraire, dans le calcul.

Les quantités positives & les quantités négatives peuvent se trouver & se trouvent souvent mêlées ensemble dans un calcul, non-seulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu jusqu'ici, à retrancher certaines quantités, d'autres quantités; mais encore parce que l'on a souvent besoin d'exprimer dans le calcul, les différens aspects sous lesquels on considère les quantités.

70. Si donc après avoir résolu une question, il arrivoit que la valeur de l'inconnue trouvée par les méthodes ci-dessus, fût négative; par exemple, si l'on arrivoit à un résultat tel que celui-ci, $x = -3$, il faudroit en conclure que la quantité qu'on a désignée par x , n'a point les propriétés qu'on lui a supposées en faisant le calcul, mais des propriétés toutes contraires. Par exemple, si l'on proposoit cette question, trouver un nombre qui étant ajouté à 15 donne 10; cette question est évidemment impossible; si l'on représente le nombre cherché

par x , on aura cette équation $x + 15 = 10$, & par conséquent, en vertu des règles ci-dessus, $x = 10 - 15$ ou $x = -5$. Cette dernière conclusion me fait donc voir que x que j'avois considéré comme devant être ajouté à 15, pour former 10, en doit au contraire être retranché. Ainsi toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé de la question; mais en même temps elle en indique la correction, en ce qu'elle marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout opposé à celui dans lequel elle a été prise.

71. Concluons donc de-là, que si après avoir résolu une question dans laquelle quelques-unes des quantités étoient prises dans un certain sens, si, dis-je, on veut résoudre cette même question en prenant ces mêmes quantités dans un sens tout opposé, il suffira de changer les signes qu'ont actuellement ces quantités. Par exemple, dans la question quatrième, résolue généralement pour le cas où les deux courriers alloient vers un même côté, si je veux avoir la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer dans le cas où ils viennent au-devant l'un de l'autre, j'y satisferai, en changeant, dans la valeur de x que nous avons trouvée $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le signe de c . En effet, puisque le premier courrier vient au-devant du second au lieu de s'en éloigner, il :

diminue le chemin que celui-ci doit faire ; il le diminue à raison du chemin c qu'il fait par heure ; il faut donc exprimer que c , au lieu d'ajouter, retranche ; il faut donc, au lieu de $+c$, mettre $-c$. Ce changement donnera $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; car en changeant le signe de c , dans le terme $+bcd$ qui n'est autre chose que $+bd \times +c$, il faudroit écrire $+bd \times -c$, qui (24) revient à $-bcd$.

Confirmons tout cela par un exemple : supposons deux couriers venant en sens contraires, & partis de deux endroits éloignés de cent lieues. Le premier part sept heures avant le second, & fait deux lieues par heure ; le second en fait trois par heure. En nommant x le chemin que fera celui-ci jusqu'à la rencontre, je vois que x sera égal à la différence entre la distance totale & le chemin qu'aura fait le premier courier : or le chemin qu'aura fait celui-ci est composé du chemin qu'il peut faire pendant sept heures, & du chemin qu'il fera pendant que le second sera en marche : à l'égard de ce dernier chemin, on le déterminera en calculant le quatrième terme de cette proportion $3 : 2 :: x :$; ce quatrième terme sera $\frac{2x}{3}$; & puisque le chemin que fait le premier courier pendant les sept heures qu'il a d'avance, doit être de 14 lieues, à raison de 2 lieues par heure, il aura donc fait en tout $14 + \frac{2x}{3}$; donc il ne reste à faire pour le second courier, que la quantité $100 - 14 - \frac{2x}{3}$ ou $86 - \frac{2}{3}x$; puis donc qu'on a représenté par x ce qu'il avoit à faire, il faut que $x = 86 - \frac{2}{3}x$; équation d'où l'on tire $3x = 258 - 2x$, ou $5x = 258$, ou enfin $x = \frac{258}{5} = 51 \frac{3}{5}$. Or si l'on substitue

dans la formule $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que nous prétendons convenir à ce cas, si l'on substitue, dis-je, 100 pour a , 7 pour b , 3 pour d , & 2 pour c , on aura $x = \frac{100 \times 3 - 7 \times 2 \times 3}{3 + 2} = \frac{300 - 42}{5} = \frac{258}{5} = 51 \frac{3}{5}$; ce qui est absolument la même chose.

A mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives.

72. Comme il importe beaucoup d'acquérir la facilité de mettre en équation, nous joignons ici quelques questions simples, pour exercer les Commencans, nous contentant d'en donner le résultat pour servir à confirmer leurs essais. Après avoir résolu ces questions en nombres, ainsi qu'elles sont proposées, on fera très-bien de s'exercer à les résoudre, en substituant des lettres aux nombres : c'est en imitant ainsi les solutions particulières, que l'on acquiert la facilité de généraliser & d'étendre ses idées.

Trouver un nombre qui étant successivement ajouté à 5 & à 12, donne deux sommes qui soient l'une à l'autre, comme 3 est à 4. . .
 Rép. 16.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers, & les $\frac{2}{3}$ réunis, surpassent ce nombre de 7. . . Rép. 30.

On emploie trois ouvriers dont le premier fait 5 toises d'ouvrage par jour, le second 7, & le troisième 8; on demande en quel temps ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feront 100 toises. . .
 Rép. 5 jours.

On a loué un ouvrier paresseux à raison de 24 sols pour chaque jour qu'il travailleroit ; mais à condition de lui retenir , sur ce qui lui seroit dû , 6 sols pour chaque jour qu'il ne travailleroit pas. On lui fait son compte au bout de 30 jours , & il se trouve qu'il n'a rien à recevoir , on demande combien de jours il a travaillé. . . .
 Rép. 6 jours.

Un homme achète un cheval qu'il vend ensuite 90 livres de plus qu'il ne l'a acheté. A ce marché il se trouve gagner 10 pour cent du prix qu'il le vend ; on demande combien il l'a acheté. . . .
 Rép. 900 liv.

On a payé une certaine somme en 15 paiemens qui ont été en augmentant toujours de la même quantité ; le premier paiement a été de 7 livres , le dernier de 37 livres ; on demande de combien chaque paiement augmentoit. . . . Rép. 2 $\frac{1}{2}$.

On a de l'eau de mer , qui sur 32 livres contient une livre de sel ; on demande combien il faudroit y mêler d'eau douce pour que sur 32 livres du mélange , il n'y eût plus que 2 onces de sel. . . .
 Rép. 224 livres.

Des Équations du premier degré , à deux inconnues.

73. Soit qu'il y ait plusieurs inconnues , soit qu'il n'y en ait qu'une , la méthode qu'on doit suivre pour mettre en équation est toujours la même. Mais , en général , il faut former autant d'équations que peuvent en donner les conditions de la question. Si ces conditions sont toutes distinctes & indépendantes les unes des autres , & si , en même temps ,

chacune peut être exprimée par une équation, la question ne peut avoir plus d'une solution, lorsque toutes ces équations sont du premier degré, & qu'en même temps il y en a autant que d'inconnues. Mais si quelqu'une des conditions se trouve ou explicitement ou implicitement comprise dans quelqu'une des autres, ou si le nombre des conditions est moindre que le nombre des inconnues, alors on aura moins d'équations que d'inconnues; & la question peut avoir une infinité de solutions, à moins que quelque condition particulière, mais qui ne peut être exprimée par une équation, n'en limite le nombre. Nous éclaircirons tout cela par des exemples.

Nous supposerons d'abord deux équations & deux inconnues.

Les règles que nous avons établies concernant les équations à une inconnue, ont également lieu pour les équations à plusieurs inconnues; mais il faut y ajouter la règle suivante pour les équations à deux inconnues.

74. *Prenez dans chaque équation la valeur d'une même inconnue, en opérant comme si tout le reste étoit connu : égalez ces deux valeurs, & vous aurez une équation qui ne renfermera plus que la seconde inconnue, que vous déterminerez par les règles précédentes. Cette seconde inconnue étant trouvée, substituez sa valeur dans*

l'une ou l'autre des deux valeurs que vous avez prises par la première opération , & vous aurez la seconde inconnue.

Par exemple , si j'avois les deux équations $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$. De la première , je tirerois en transposant , $2x = 24 - y$, & en divisant , $x = \frac{24 - y}{2}$. De la seconde , je tire en transposant , $5x = 65 - 3y$, & en divisant , $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

J'égalé les deux valeurs de x , en écrivant $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$.
Équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue y .

Pour avoir la valeur de y , je chasse (64) les dénominateurs 2 & 5 ; & j'ai $120 - 5y = 130 - 6y$: transposant & réduisant , j'ai $y = 10$.

Pour avoir x , je substitue , au lieu de y , sa valeur 10 dans la première valeur de x trouvée ci-dessus. (On pourroit également substituer dans la seconde). Cette substitution me donne $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

75. Prenons pour second exemple , les deux équations $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, & $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Je commence par chasser les dénominateurs (64), dans chacune de ces équations , ce qui les change en ces deux autres , $24x - 25y = 60$ & $8x + 9y = 228$. De la première de ces deux-ci , je tire en transposant , $24x = 60 + 25y$, & en divisant , $x = \frac{60 + 25y}{24}$. De la seconde , j'ai en transposant , $8x = 228 - 9y$, & en divisant , $x = \frac{228 - 9y}{8}$.

J'égalé ces deux valeurs de x , en écrivant $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$; équation qui ne renferme plus que y .

Pour avoir la valeur de cette inconnue, je chasse les dénominateurs, & j'ai $480 + 200y = 5472 - 216y$; transposant, il me vient $200y + 216y = 5472 - 480$, qui se réduit à $416y = 4992$; enfin, divisant, j'ai $y = \frac{4992}{416} = 12$.

Pour avoir x , je mets, au lieu de y , sa valeur 12 dans l'une ou l'autre des deux valeurs de x , dans la première, par exemple ; c'est-à-dire, dans $x = \frac{60 + 25y}{24}$, laquelle devient par-là, $x = \frac{60 + 25 \times 12}{24} = \frac{60 + 300}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

76. Prenons pour troisième exemple, les deux équations $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}x + \frac{2}{7}y - 9$ & $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Je commence par faire disparaître les dénominateurs (64) ;

J'ai $56x = 35x + 60y - 1260$.

Et $56x - 20y = 35y - 420$.

De la première je tire, en transposant & réduisant, $21x = 60y - 1260$, & en divisant, $x = \frac{60y - 1260}{21}$.

La seconde me donne, en transposant & réduisant, $56x = 55y - 420$, & en divisant, $x = \frac{55y - 420}{56}$.

Égalant ces deux valeurs de x , j'ai $\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{56}$.

Pour avoir la valeur de y dans cette équation, je chasse les dénominateurs, & j'ai $3360y - 70560 = 1155y - 8820$; transposant & réduisant, il vient $2205y = 61740$; enfin en divisant, on a $y = \frac{61740}{2205} = 28$.

Pour avoir la valeur de x , je substitue, au lieu de y , sa valeur

valeur 28, dans l'équation $x = \frac{60y - 1260}{21}$ trouvée ci-dessus ;

ce qui donne $x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{1680 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$.

77. Si les équations étoient littérales, on opéreroit de la même manière. Ainsi, si l'on avoit les deux équations $ax + by = c$, & $dx + fy = e$, dans lesquelles a, b, c, d, e, f marquent des quantités connues, positives ou négatives; la première donneroit, par transposition $ax = c - by$, & par division, $x = \frac{c - by}{a}$; la seconde donneroit de même par transposition $dx = e - fy$, & par division $x = \frac{e - fy}{d}$. Égalant ces deux valeurs de x , on auroit $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$; chassant les fractions, on a $cd - bdy = ae - afy$; transposant, $afy - bdy = ae - cd$; enfin, divisant (61), on a $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Pour avoir la valeur de x , il faut substituer, au lieu de y , la valeur $\frac{ae - cd}{af - bd}$, dans l'une des deux valeurs de x , dans $x = \frac{c - by}{a}$, par exemple. Cette

substitution donnera $x = \frac{c - b \times \frac{ae - cd}{af - bd}}{a}$ qui revient à

$$x = \frac{\frac{c - abe + bcd}{af - bd}}{a}, \text{ ou (45) réduisant } c \text{ en fraction,}$$

$$x = \frac{\frac{afc - bcd - abc + bcd}{af - bd}}{a}, \text{ ou } x = \frac{\frac{afc - abc}{af - bd}}{a}, \text{ ou}$$

$$(52), x = \frac{afc - abc}{aaf - abd}, \text{ ou enfin (33), } x = \frac{fc - be}{af - bd}.$$

78. Nous avons supposé jusqu'ici, que les deux inconnues se trouvoient toutes deux dans chaque équation. Lorsque cela n'arrive point, le calcul ne diffère des précédens qu'en ce qu'il est plus simple.

Par exemple, si l'on avoit $5ax = 3b$ & $cx + dy = e$: la première donneroit $x = \frac{3b}{5a}$; & la seconde, $x = \frac{e - dy}{c}$. Égalant ces deux valeurs, on auroit $\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$; d'où chassant les dénominateurs, transposant & réduisant, on tire $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Des Équations du premier degré, à trois, & à un plus grand nombre d'inconnues.

79. Ce que nous venons de dire étant une fois bien conçu, il est facile de voir comment on doit se conduire, lorsque le nombre des inconnues & des équations est plus considérable.

Nous supposerons toujours qu'on ait autant d'équations que d'inconnues. Si l'on en a trois, on prendra dans chacune la valeur d'une même inconnue, comme si tout le reste étoit connu. On égalera ensuite la première valeur à la seconde, & la première à la troisième ; ou

bien l'on égalera la première à la seconde, & la seconde à la troisième. On aura, par ce procédé, deux équations à deux inconnues seulement; & on les traitera par la règle précédente (74).

Soient, par exemple, les trois équations :

$$3x + 5y + 7z = 179$$

$$8x + 3y - 2z = 64$$

$$5x - y + 3z = 75$$

De la première, je tire, par transposition, $3x = 179 - 5y - 7z$; & , par division, $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

De la seconde, j'ai, par transposition, $8x = 64 - 3y + 2z$, & , par division, $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

De la troisième, j'ai, par transposition, $5x = 75 + y - 3z$, & par division, $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Égalant la première valeur de x à la seconde, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Égalant de même la première à la troisième, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Comme il n'y a plus que deux inconnues, je traite ces deux dernières équations suivant la règle donnée (74) pour les équations à deux inconnues. Je chasse donc d'abord les dénominateurs, ce qui me donne les deux équations suivantes $1432 - 40y - 56z = 192 - 9y + 6z$, & $895 - 25y - 35z = 225 + 3y - 9z$.

Je prends dans chacune de ces équations la valeur de y :

la première me donne, en transposant & réduisant, $1240 - 62z = 31y$, & en divisant, $y = \frac{1240 - 62z}{31}$. La seconde me donne, en transposant & réduisant, $670 - 26z = 28y$, & en divisant, $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

J'égalé ces deux valeurs de y , & j'ai $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Pour en avoir la valeur, je chasse les dénominateurs, & j'ai $34720 - 1736z = 20770 - 806z$. Transposant & réduisant, il vient $13950 = 930z$; divisant enfin, on a $z = \frac{13950}{930} = \frac{1395}{93} = 15$.

Pour avoir y , je mets, au lieu de z , sa valeur 15, dans l'équation $y = \frac{1240 - 62z}{31}$ que nous venons de trouver ci-dessus, ce qui me donne $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{1240 - 930}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Enfin, pour avoir x , je mets, au lieu de y , sa valeur 10, & au lieu de z , sa valeur 15, dans l'une des trois valeurs de x trouvées ci-dessus; par exemple, dans $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$, qui devient par-là $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{179 - 50 - 105}{3} = \frac{179 - 155}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

80. Si toutes les inconnues n'entroient pas à la fois dans chaque équation, le calcul seroit plus simple, mais se feroit toujours d'une manière analogue.

Par exemple, si l'on avoit les trois équations, $5x +$

$3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. La première donneroit $x = \frac{65 - 3y}{5}$, la seconde ne donneroit point de valeur de x ; la troisième donneroit $x = \frac{57 - 4z}{3}$; il n'y auroit donc que ces deux valeurs de x à égaler, elles donnent $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, équation qui ne renferme plus d' x , & qui étant traitée, avec la seconde équation $2y - z = 11$, selon les règles des équations à deux inconnues, donnera les valeurs de y & de z . En achevant le calcul, on trouvera $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81. On voit par-là que s'il y avoit un plus grand nombre d'équations, la règle générale feroit.... Prenez, dans chaque équation, la valeur d'une même inconnue; égalez l'une de ces valeurs à chacune des autres, & vous aurez une équation & une inconnue de moins. Traitez ces nouvelles équations comme vous venez de faire pour les premières, & vous aurez encore une équation & une inconnue de moins. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à n'avoir plus qu'une inconnue.

82. Il ne fera peut-être pas inutile de placer ici une règle générale pour déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. Lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable, & que les équations renferment tous les termes qu'elles peuvent renfermer, on est conduit, par la première méthode, si elles sont littérales, à des valeurs plus composées qu'il ne convient; à la vérité, on peut les réduire, mais c'est un travail qui devient d'autant plus long, que le nombre des inconnues est plus

considérable. D'ailleurs nous réduirons, par la suite, l'art de chasser les inconnues dans les équations qui passent le premier degré, à celui de les chasser dans celles du premier degré. Les méthodes que l'on a eues jusqu'ici pour éliminer ou chasser les inconnues, dans les équations qui passent le premier degré, ont toutes (si l'on en excepte seulement celles qu'ont données MM. Euler & Cramer) l'inconvénient de conduire à des équations beaucoup plus composées qu'il ne faut. Ces dernières même ne sont point à l'abri de cet inconvénient, lorsqu'on a plus de deux inconnues. Il peut donc être utile de donner ici des moyens faciles pour avoir les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. C'est ce que nous allons faire après avoir exposé une seconde méthode qui peut avoir son utilité dans plusieurs rencontres.

Soient les deux équations $3x + 4y = 81$ & $3x - 4y = 9$. Si l'on retranche la seconde de la première, on aura $8y = 72$, & par conséquent, $y = \frac{72}{8} = 9$. Au contraire, si l'on ajoute la première équation à la seconde, on aura $6x = 90$, & par conséquent, $x = \frac{90}{6} = 15$. On voit donc que lorsque les deux équations sont telles que le coefficient de l'une des inconnues, est le même dans chacune, il est très-facile par une simple addition ou une simple soustraction, de réduire les deux équations à n'avoir qu'une inconnue.

83. Mais ne peut-on pas ramener les équations à cet état ? On le peut toujours ; il suffit pour cela de multiplier l'une des deux équations par un nombre convenable. Voici comment on doit s'y prendre pour trouver ce nombre. Soient les deux équations $4x + 3y = 65$, & $5x + 8y = 111$.

Je représente par m , le nombre dont il s'agit, & je

multiplie l'une des deux équations, la seconde par exemple, par m , ce qui me donne $5mx + 8my = 111m$. Je l'ajoute avec la première, & j'ai $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, qu'on peut écrire ainsi $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Si je veux maintenant faire disparaître les x , je n'ai qu'à supposer que le nombre m est tel que $4 + 5m = 0$, ce qui me donne $m = -\frac{4}{5}$. Cette supposition réduit l'équation à $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, qui donne $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$; Équation, qui, en mettant pour m sa valeur

$$-\frac{4}{5}, \text{ devient, } y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = \frac{\frac{325 - 444}{5}}{\frac{15 - 32}{5}} = \frac{-119}{-17} = +\frac{119}{17} \times \frac{5}{5} = \frac{119}{17} = 7.$$

Si au contraire j'avois voulu faire disparaître les y , j'aurois supposé m tel que $3 + 8m = 0$, c'est-à-dire, que j'aurois égalé à zéro, le coefficient ou multiplicateur de y , ce qui m'auroit donné $m = -\frac{3}{8}$. Cette supposition réduit l'équation à $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, qui donne $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$; équation, qui, en mettant pour m sa valeur

$$\text{actuelle, } -\frac{3}{8}, \text{ devient } x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = \frac{\frac{520 - 333}{8}}{\frac{32 - 15}{8}} = \frac{187}{17} = 11.$$

84. Si l'on avoit trois équations & trois inconnues, on multiplieroit la seconde par un nombre m & la troisième

par un nombre n , & les ajoutant, ainsi multipliées, à la première; on supposeroit égal à zéro, le coefficient de chacune de deux des trois inconnues x , y & z . On auroit, pour déterminer m & n , deux équations que l'on traiteroit comme dans le cas précédent.

Par exemple, prenons les trois équations $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$ que nous avons déjà traitées. En multipliant la seconde par m , la troisième par n , & les ajoutant à la première, on aura $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$ qu'on peut écrire ainsi, $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Si c'est z que je veux avoir, je supposerai $3 + 8m + 5n = 0$ & $5 + 3m - n = 0$; ce qui réduit l'équation à $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, qui donne $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; il ne s'agit donc plus que de déterminer m & n , ce que l'on fera par le moyen des deux équations $3 + 8m + 5n = 0$, & $5 + 3m - n = 0$, que l'on traitera comme dans le cas précédent, c'est-à-dire, qu'on multipliera la seconde par un nombre p & on l'ajoutera à la première, ce qui donnera $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, qu'on écrira ainsi, $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$; pour avoir n , on supposera $8 + 3p = 0$, ce qui réduira l'équation à $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, qui donne $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; or l'équation $8 + 3p = 0$, donne $p = -\frac{8}{3}$; donc $n = \frac{-3 + \frac{40}{3}}{5 + \frac{8}{3}}$, qui se réduit à $n = \frac{31}{23}$; par une opération

semblable, on trouvera $m = -\frac{28}{23}$, substituant donc dans la

$$\text{valeur de } z, \text{ on aura } z = \frac{179 - 64 \cdot \frac{28}{23} + 75 \cdot \frac{31}{23}}{7 - 2 \cdot \frac{28}{23} + 3 \cdot \frac{31}{23}},$$

qui se réduit à $z = 15$. On voit par-là, comment on s'y feroit pris, si au lieu de z , on avoit voulu avoir y ou x ; mais, lorsque l'une des inconnues est trouvée, il seroit superflu de recommencer un calcul semblable pour chacune des autres, il faut substituer la valeur de cette inconnue dans les équations proposées; & employant une équation de moins, on détermine les autres valeurs, comme pour le cas où il y a une équation de moins.

85. En suivant cette méthode, ou la première, on peut dresser des formules générales qui représentent les valeurs des inconnues dans tous les cas imaginables. C'est ainsi qu'on trouvera que si l'on représente généralement deux équations du premier degré à deux inconnues par $ax + by + c = 0$, & $a'x + b'y + c' = 0$, ce qu'on peut toujours faire, en passant tous les termes dans un même membre, & représentant par une seule lettre la totalité des quantités connues qui multiplient chaque inconnue, & la totalité des termes entièrement connus, on trouvera, dis-je, que les valeurs de x & de y sont exprimées en cette manière :

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Pareillement, si l'on représente trois équations du premier degré à trois inconnues, par $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, on trouvera que les valeurs de x , y & z , sont exprimées en cette manière.

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c} \\
 y &= \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c} \\
 x &= \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}
 \end{aligned}$$

Pour 4 équations & 4 inconnues, on auroit quatre fractions dont le numérateur & le dénominateur auroient chacun 24 termes. Ils auroient 120 termes pour 5 inconnues; 720, pour 6, & ainsi de suite, selon le produit des nombres 1. 2. 3. 4. 5., &c.

On voit donc qu'il seroit très-long de les calculer l'une après l'autre, en suivant pas à pas le procédé de la première ou de la seconde méthode. Un peu d'attention sur la forme des valeurs que nous venons de trouver, & sur celle que l'on trouveroit de même pour quatre équations & quatre inconnues, conduit aux conséquences suivantes qui facilitent & abrègent beaucoup le calcul.

1°. Les valeurs des inconnues x , y , z &c., en quelque nombre qu'elles soient, ont toutes le même dénominateur.

2°. Le numérateur de chacune se conclut de son dénominateur en changeant, dans celui-ci, le coefficient de cette inconnue, contre la dernière lettre d de l'équation, & changeant tous les signes de $+$ en $-$ & de $-$ en $+$. Par exemple, si dans le dénominateur de la valeur de x trouvée dernièrement, vous changez a en d , a' en d' , a'' en d'' , & si vous changez en même temps les signes, vous avez le numérateur.

Il fera donc facile de calculer chacune des inconnues, si nous pouvons avoir une règle pour trouver le dénominateur commun. Pour trouver cette règle, je remarque,

1°. que lorsqu'il n'y a qu'une équation & une inconnue , comme $ax + b = 0$, le dénominateur est a . 2°. Lorsqu'il y a deux équations & deux inconnues, le dénominateur est $ab' - a'b$. 3°. Lorsqu'il y a trois équations & trois inconnues, il est $+ ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c$ qu'on peut mettre sous cette forme $(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c$.

Or je remarque que $ab' - a'b$ dénominateur dans le cas de deux inconnues, se forme de a , dénominateur dans le cas d'une seule inconnue, en multipliant a par b' , puis changeant dans ab' , l'accent ' en o & o en ' ; (par la lettre qui auroit o pour accent, nous entendons la lettre que nous n'avons point accentuée) ; & enfin changeant $+$ en $-$.

Pareillement le dénominateur dans le cas de trois inconnues, savoir $(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c$, se forme de $(ab' - a'b)$, dénominateur dans le cas de deux inconnues, 1°. en multipliant celui-ci par c'' . 2°. Changeant '' en ' & ' en '' , changeant aussi les signes. 3°. Changeant dans ce dernier résultat ' en o & o en ' , & les signes.

On voit donc que pour avoir le dénominateur pour quatre inconnues, on multiplieroit celui qui convient à trois inconnues, par a''' ; on échangeroit ensuite ''' en '' & '' en ''', & on changeroit les signes. Dans ce second résultat, on changeroit '' en ' & ' en '' , & les signes ; dans ce troisième, on changeroit ' en o & o en ' , & les signes.

La règle est générale actuellement, & l'on voit ce qu'il y a à faire dans le cas d'un plus grand nombre d'inconnues.

Quoiqu'on soit obligé de calculer les dénominateurs qui

conviennent à toutes les équations à un moindre nombre d'inconnues, il ne faut pas craindre que cette règle n'entraîne à plus de calculs qu'il n'est nécessaire, tout ce que l'on calcule par cette règle, entre nécessairement dans la quantité que l'on cherche.

Application des Règles précédentes à la résolution de quelques questions qui renferment plus d'une inconnue.

86. Question première : *Un homme a deux espèces de monnaie : sept pièces de la plus forte espèce, avec douze pièces de la seconde, font 288 livres ; & 12 pièces de la première espèce, avec sept de la seconde, font 358 livres. On demande combien vaut chaque espèce de monnaie ?*

Si l'on savoit combien vaut chaque espèce de pièce, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce, par 7, & celle d'une pièce de la seconde espèce, par 12, & ajoutant les deux produits, on trouveroit 288 livres ; pareillement, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce, par 12, celle de la seconde par 7, & ajoutant les deux produits, on trouveroit 358 livres ; cela étant, si je représente par x le nombre de livres ou la valeur d'une pièce de la première espèce, & par y celle d'une pièce de la seconde espèce, je pourrai raisonner ainsi :

Chaque pièce de la première espèce valant x , les 7 pièces vaudront 7 fois x , ou $7x$; par la même raison 12 pièces de la seconde espèce vaudront $12y$; il faut donc que $7x + 12y = 288$.

Un raisonnement semblable à l'égard de la seconde condition, fera voir qu'il faut que $12x + 7y = 358$. Il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs de x & de y .

Pour cet effet, je prends dans chaque équation la valeur de x . La première me donne, après la transposition & la division, $x = \frac{288 - 12y}{7}$; la seconde me donne $x = \frac{358 - 7y}{12}$; j'égle ces deux valeurs de x , & j'ai l'équation $\frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$.

Pour tirer de cette dernière la valeur de y , je chasse les dénominateurs (64) & j'ai $3456 - 144y = 2506 - 49y$, ou en transposant & réduisant, $950 = 95y$, ou enfin en divisant, $y = \frac{250}{95} = 10$. Pour avoir x , je reprends la première valeur de x , savoir $x = \frac{288 - 12y}{7}$, & substituant pour y , la valeur 10, j'ai.
 $x = \frac{288 - 12 \times 10}{7} = \frac{288 - 120}{7} = \frac{168}{7} = 24$; donc la plus forte pièce étoit de 24 livres & la plus petite de 10 livres. En effet, 7 pièces de 24 livres font 168 livres, qui avec 12 pièces de 10 livres ou 120 livres, font 288 livres. De plus, 12 pièces de 24 livres, qui font 288 livres, avec sept pièces de 10 livres qui font 70 livres, donnent 358 livres.

Question seconde: On a mêlé ensemble une certaine quantité d'or & une certaine quantité d'argent. Tout le mélange fait un volume de 12 pouces cubes, & pèse 100 onces: un pouce cube d'or pèse 12 onces $\frac{2}{3}$, & un pouce cube d'argent pèse 6 onces $\frac{2}{3}$. On demande quelle est la quantité d'or & quelle est la quantité d'argent qui ont été alliés?

Si l'on connoissoit le nombre de pouces cubes de chaque espèce de matière, en ajoutant ces deux nombres, ils donneroient 12 pour leur somme. De plus, en prenant 12 onces $\frac{2}{3}$ autant de fois qu'il y a de pouces cubes d'or,

c'est-à-dire, en multipliant $12\frac{2}{3}$ par le nombre des pouces cubes d'or, on auroit le poids de l'or qui entre dans le mélange, & en multipliant de même 6 onces $\frac{2}{3}$ par le nombre des pouces cubes d'argent, on auroit le poids de l'argent, & en ajoutant ces deux produits, ils formeroient 100 onces.

Raisonnons donc de la même manière en représentant par x le nombre des pouces cubes d'or, & par y le nombre des pouces cubes d'argent: il faut donc que $x + y = 12$, D'un autre côté, chaque pouce cube d'or pesant 12 onces $\frac{2}{3}$, ou $\frac{38}{3}$ d'once, un nombre x de pouces d'or pesera $\frac{38}{3} \times x$ ou $\frac{38x}{3}$. Par la même raison chaque pouce cube d'argent pesant 6 onces $\frac{2}{3}$ ou $\frac{62}{3}$ d'once, un nombre y de pouces cubes, pesera $\frac{62}{3} \times y$ ou $\frac{62}{3} y$; donc l'or & l'argent réunis peseront $\frac{38}{3} x + \frac{62}{3} y$; or ils doivent peser 100 onces; donc $\frac{38}{3} x + \frac{62}{3} y = 100$.

Pour trouver les valeurs de x & de y , je chasse les dénominateurs de cette dernière équation, & j'ai $342x + 186y = 2700$. De la première équation je tire $x = 12 - y$, & la dernière donne $x = \frac{2700 - 186y}{342}$; égalant ces deux valeurs, on a $12 - y = \frac{2700 - 186y}{342}$.

Pour avoir y , je chasse le dénominateur, & il me vient $4104 - 342y = 2700 - 186y$; transposant & réduisant, $1404 = 156y$, & enfin en divisant, $y = \frac{1404}{156} = 9$; & comme on a trouvé $x = 12 - y$, on a donc $x = 3$, c'est-à-dire, qu'on a mêlé 3 pouces d'or avec 9 pouces d'argent. En effet, le tout fait 12 pouces cubes. D'ailleurs 3 pouces cubes pesant chacun 12 onces $\frac{2}{3}$ font 38 onces, & 9 pouces cubes pesant chacun 6 onces $\frac{2}{3}$ font 62 onces, lesquelles avec les 38, font 100 onces.

Si les deux matières, qu'on a mêlées avoient des pesanteurs spécifiques (*) différentes , & si le volume , ainsi que le poids total du mélange , étoient différens de ce qu'on vient de supposer , la méthode , pour trouver les quantités de chaque espèce de matière , n'en seroit pas moins la même ; ainsi pour renfermer dans une seule , toutes les solutions des questions de cette espèce , supposons généralement que le nombre total des pouces cubes des deux espèces de matière soit . . . a .

Que le poids total du mélange exprimé en onces ,
soit b .

Que le poids d'un pouce cube de la première matière
soit c .

Et celui d'un pouce cube de la seconde soit d .

c & d étant exprimés en onces.

Alors si nous représentons par x le nombre des pouces cubes de la première matière , & par y le nombre de pouces cubes de la seconde ; nous aurons pour première équation

$$x + y = a.$$

D'ailleurs chaque pouce de la première matière pesant c d'onces , dès qu'il y a x de pouces cubes , la quantité de la première matière pesera $c \times x$ ou cx . Par la même raison , la quantité de la seconde matière pesera dy ; en sorte que le total pesera $cx + dy$; & comme il est supposé peser b , il faut que $cx + dy = b$.

<p>(*) On appelle <i>pesanteur spécifique</i> , la pesanteur d'un corps dont le volume est connu. Quand on dit : Un tel corps pèse 12 livres ; on ne détermine que le poids de ce corps & non pas celui de l'espèce de matière dont il est com-</p>	<p>posé ; mais quand on dit , par exemple , 12 pouces cubes d'eau commune pèsent 7 onces 6 gros , alors on détermine la pesanteur de cette espèce d'eau ; on met en état de déterminer combien pèse tout autre volume connu de cette même eau.</p>
---	--

Cela posé, la première équation donne $x = a - y$; la seconde donne $x = \frac{b - dy}{c}$; égalant ces deux valeurs, on a $a - y = \frac{b - dy}{c}$; chassant le dénominateur, il vient $ac - cy = b - dy$, transposant & divisant, $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Pour avoir la valeur de x , il faut substituer dans l'équation $x = a - y$, la valeur qu'on vient de trouver pour y , & l'on aura $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$, où l'on voit que j'ai changé les signes du numérateur de $\frac{ac - b}{c - d}$, parce que y doit être retranché de a (11). Cette valeur de x peut être simplifiée, en réduisant le tout en fraction (45), ce qui donnera $x = \frac{ac - ad + b - ac}{c - d}$, ou en réduisant, $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

Les valeurs $x = \frac{b - ad}{c - d}$, & $y = \frac{ac - b}{c - d}$ que l'on vient de trouver, peuvent fournir une règle susceptible d'un énoncé assez simple, pour la résolution générale de toutes les questions de cette espèce.

Pour trouver cette règle, il faut faire attention 1°. que b marque le poids total du mélange; 2°. que a marquant le nombre total des parties du mélange, & d le poids d'une des parties de la seconde espèce, ad marque ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la matière de la seconde espèce. En effet, si tout le volume étoit d'argent, par exemple, on trouveroit son poids total, en multipliant la pesanteur d d'un pouce cube d'argent, par le nombre total a des pouces cubes. Enfin le dénominateur $c - d$ est la différence des pesanteurs spécifiques de chaque espèce de matière.

Si l'on analyse, de même, la valeur de y , on verra que ac est

est ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit uniquement composé de la première matière. De-là on pourra conclure cette règle.

Calculez ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la seconde matière; retranchez ce poids du poids total actuel du mélange, & divisez le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières: le quotient sera le nombre des parties de la première matière qui entre dans le mixte.

Au contraire, pour avoir le nombre des parties de la seconde matière, calculez ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit tout entier de la première matière; retranchez-en le poids total actuel du mélange, & divisez le reste par la même quantité que ci-dessus.

Cette règle est précisément, ce qu'on appelle en Arithmétique, la règle d'Alliage; & qu'en Arithmétique nous avons renvoyée à cette troisième Partie.

On peut, à cette même question, en ramener une infinité d'autres, qui, au premier coup d'œil, ne semblent pas de même espèce: par exemple, celle-ci: *Faire 522 liv. en 42 pièces, les unes de 24 liv. & les autres de 6 livres; car avec un peu d'attention, on voit que cette question est la même que cette autre; un mixte composé de 42 pouces cubes de matière, pèse 522 onces: des deux matières qui y entrent, l'une pèse 24 onces par pouce cube, & l'autre 6 onces. En suivant la règle précédente, on trouvera qu'il faut 15 pièces de 24 livres & 27 pièces de 6 livres.*

La même règle serviroit encore à résoudre cette autre question. *Un pied cube d'eau de mer pèse 74 liv., un pied cube d'eau de pluie pèse 70 livres; combien faudroit-il mêler ensemble d'eau de mer & d'eau de pluie, pour faire de l'eau qui pesât 73 livres par pied cube?*

Marine. Algèbre.

G

On voit par-là, combien il peut être utile de s'accoutumer de bonne heure à représenter, d'une manière générale, les quantités connues qui entrent dans les questions, & à interpréter ou traduire les résultats algébriques des solutions des problèmes.

Question troisième : On a trois lingots dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent & du cuivre. L'alliage dans le premier est tel que sur 16 onces, il y en a 7 d'or, 8 d'argent & 1 de cuivre. Dans le second, sur 16 onces il y en a 5 d'or, 7 d'argent & 4 de cuivre. Dans le troisième, sur 16 onces il y en a 2 d'or, 9 d'argent & 5 de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces trois alliages, composer un troisième lingot, tel que sur 16 onces, il s'en trouve 4 onces & $\frac{13}{16}$ en or, $7\frac{10}{16}$ en argent, & $3\frac{7}{16}$ en cuivre.

Représentons par x le nombre d'onces qu'il faut prendre du premier lingot ; par y , le nombre d'onces qu'il faut prendre du second ; & enfin par z , le nombre d'onces qu'il faut prendre du troisième.

Puisque 16 onces du premier contiennent 7 onces d'or, on trouvera ce que x d'onces de ce même lingot peuvent contenir d'or, en calculant le quatrième terme de cette proportion $16 : 7 :: x :$; ce quatrième sera $\frac{7x}{16}$; par un raisonnement semblable, on trouvera qu'en prenant y d'onces du second lingot, on prend $\frac{5y}{16}$ en or, & sur le troisième $\frac{2z}{16}$. Ces trois quantités réunies font $\frac{7x + 5y + 2z}{16}$; or, on veut qu'elles fassent $4\frac{13}{16}$ ou $\frac{72}{16}$; donc $\frac{7x + 5y + 2z}{16} = \frac{72}{16}$.

Pour satisfaire à la seconde condition, on remarquera,

de même, qu'en prenant x d'onces sur le premier lingot, on prend nécessairement $\frac{8x}{16}$ d'onces en argent, sur le second $\frac{7y}{16}$, & enfin sur le troisième on prend nécessairement $\frac{9z}{16}$, ces trois quantités réunies font $\frac{8x + 7y + 9z}{16}$, & comme on veut qu'elles fassent $7\frac{10}{16}$ ou $\frac{122}{16}$, on aura $\frac{8x + 7y + 9z}{16} = \frac{122}{16}$.

En procédant de la même manière, on aura, pour satisfaire à la troisième condition, l'équation $\frac{x + 4y + 5z}{16} = \frac{55}{16}$.

Comme le nombre 16 est diviseur commun des deux membres de chacune des trois équations qu'on vient de trouver, on peut le supprimer, & alors on aura les trois équations suivantes. $7x + 5y + 2z = 79$, $8x + 7y + 9z = 122$, $x + 4y + 5z = 55$. Tirant de chacune, la valeur de x , on aura $x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$, $x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$, $x = 55 - 4y - 5z$; égalant la première valeur de x à la seconde & à la troisième (79), on aura $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$ & $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z$, équations qui ne renferment plus que deux inconnues, & qu'il faut, par conséquent, traiter selon ce qui a été dit (74).

Pour cet effet, je commence par faire disparaître les diviseurs, & j'ai $632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$, & $79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z$, ou, en passant tous les y d'un côté, & réduisant, $9y = 222 - 47z$, & $23y = 306 - 33z$; la première de ces deux

équations donne $y = \frac{222 - 47z}{9}$; & la seconde, $y = \frac{306 - 33z}{23}$; égalant ces deux valeurs de y , j'ai $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$; chassant les diviseurs, $5106 - 1081z = 2754 - 297z$; transposant, $5106 - 2754 = 1081z - 297z$; réduisant, $2352 = 784z$; & enfin, en divisant, $z = \frac{2352}{784} = 3$.

Pour avoir la valeur de y , je substitue dans l'une des deux valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour y , j'y substitue, dis-je, au lieu de z , la valeur 3 qu'on vient de trouver; par exemple, en substituant dans $y = \frac{222 - 47z}{9}$, j'ai $y = \frac{222 - 141}{9} = \frac{81}{9} = 9$.

Enfin, pour avoir x , je substitue, au lieu de y & de z , leurs valeurs 9 & 3 dans l'une des trois valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour x ; par exemple, dans la dernière, savoir $x = 55 - 4y - 5z$, & cette valeur devient $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; c'est-à-dire, puisqu'on trouve $x = 4$, $y = 9$ & $z = 3$, qu'il faut prendre 4 onces du premier lingot, 9 du second, & 3 du troisième, & alors le nouveau lingot contiendra en or, 4 onces & $\frac{15}{16}$; en argent, 7 onces $\frac{10}{16}$; & en cuivre, 3 onces $\frac{7}{16}$.

En effet, puisque le premier lingot contient sur 16 onces, 7 onces d'or, 8 d'argent & 1 de cuivre; il est évident que si l'on prend 4 onces seulement de ce lingot, on aura $\frac{28}{16}$ d'once en or, $\frac{32}{16}$ en argent & $\frac{4}{16}$ en cuivre. Par une raison semblable, en prenant 9 onces du second lingot, on aura $\frac{45}{16}$ en or, $\frac{63}{16}$ en argent, & $\frac{36}{16}$ en cuivre, & en

prenant 3 onces du troisième lingot, on aura $\frac{6}{16}$ en or, $\frac{27}{16}$ en argent, & $\frac{15}{16}$ en cuivre.

Réunissant les trois quantités de chaque espèce de matière, provenant des trois lingots, on aura $\frac{72}{16}$, $\frac{123}{16}$, $\frac{55}{16}$, ou $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ & $3\frac{7}{16}$ pour les quantités d'or, d'argent & de cuivre qui entreront, en effet, dans le quatrième lingot.

Des cas où les questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'Équations que d'inconnues ; & des cas où les questions sont impossibles.

87. Il arrive quelquefois que quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, la question qui a conduit à ces équations reste néanmoins indéterminée, c'est-à-dire, qu'elle est alors susceptible d'un nombre indéfini de solutions.

Ce cas a lieu lorsque quelques-unes des conditions, quoique différentes en apparence, se trouvent être les mêmes dans le fond. Alors les équations qui expriment ces conditions sont, ou des multiples les unes des autres, ou, en général, quelques-unes d'entre elles, sont composées d'une ou de plusieurs des autres, ajoutées ou soustraites, multipliées ou divisées par certains nombres. Par exemple, une question qui conduiroit à ces trois équations $5x + 3y + 2z = 17$, $8x + 2y + 4z = 20$, $18x$

$+ 8y + 8z = 54$, seroit susceptible d'un nombre indéfini de solutions, quoiqu'il semble, d'après ce que nous avons vu plus haut, que x , y & z , ne peuvent avoir chacun qu'une seule valeur. De ces trois équations, la dernière est composée de la seconde ajoutée avec le double de la première. Or il est évident que les deux premières étant une fois supposées avoir lieu, la troisième s'ensuit nécessairement; que par conséquent, elle n'exprime aucune nouvelle condition: on est donc dans le même cas que si l'on avoit seulement les deux premières équations: or nous verrons dans peu que lorsqu'on n'a que deux équations pour trois inconnues, chaque inconnue est susceptible d'un nombre indéfini de valeurs.

88. Le calcul fait toujours connoître les cas dont il s'agit ici: voici comment. Il n'y a qu'à procéder à la recherche des inconnues, selon les règles données ci-dessus: alors si quelque'une des équations est comprise dans les autres, on arrivera dans le cours du calcul, à une équation *identique*, c'est-à-dire, à une équation dans laquelle les deux membres seront non-seulement égaux, mais encore composés de termes semblables & égaux: autant on trouvera d'équations identiques, autant il y aura d'équations inutiles parmi celles qui auront-été proposées.

Par exemple, si de chacune des deux équations $6x + 8y = 12$ & $x + \frac{4}{3}y = 2$, je tire la valeur de x , j'aurai $x = \frac{12-8y}{6}$ & $x = 2 - \frac{4}{3}y$: égalant ces deux valeurs, j'aurai $\frac{12-8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, ou chassant les dénominateurs, $36 - 24y = 36 - 24y$, équation identique & qui ne peut faire connoître la valeur de y , parce qu'après la transposition & la réduction, on est conduit à cette équation $0 = 0$.

Pareillement, des trois équations précédentes (87) on tire $x = \frac{17-3y-2z}{5}$, $x = \frac{20-2y-4z}{8}$ & $x = \frac{54-8y-8z}{18}$, égalant la première de ces valeurs à la seconde & à la troisième, on aura $\frac{17-3y-2z}{5} = \frac{20-2y-4z}{8}$ & $\frac{17-3y-2z}{5} = \frac{54-8y-8z}{18}$; chassant les dénominateurs, transposant, réduisant & divisant, on aura, par la première, $y = \frac{36+4z}{14}$; & par la seconde, $y = \frac{36+4z}{14}$; valeurs qui étant égalées, donnent l'équation identique $\frac{36+4z}{14} = \frac{36+4z}{14}$: il n'y a donc, dans ce cas, que deux équations réellement distinctes.

Mais si l'on avoit les trois équations suivantes:

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 24 \\ \frac{5}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z &= 60 \\ 15x + 9y + 6z &= 72 \end{aligned}$$

La première donneroit $x = \frac{24-3y-2z}{5}$; la seconde, après avoir chassé les dénominateurs, transposé, réduit, &c. donneroit $x = \frac{120-15y-10z}{25}$; & la troisième, $x = \frac{72-9y-6z}{15}$. Égalant la première de ces valeurs à la seconde & à la troisième,

on auroit $\frac{24-3y-2z}{5} = \frac{120-15y-10z}{25}$ & $\frac{24-3y-2z}{5} = \frac{72-9y-6z}{15}$,
 & en chassant les dénominateurs, $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, & $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$,
 équations identiques & dont on ne peut tirer ni y ni z , parce
 qu'elles se réduisent chacune à $0 = 0$. Il n'y a donc ici, à
 proprement parler, qu'une seule équation.

Les questions qui conduisent à de pareils résultats,
 sont indéterminées, mais ne sont pas impossibles.
 Nous verrons dans peu, comment on doit les traiter.

89. Dans les cas dont nous venons de parler, le numérateur & le dénominateur de chacune des valeurs des inconnues x, y, z , &c. que nous avons données (85), deviennent 0, ce qui doit être, ainsi qu'on peut le conclure facilement de ce que nous venons de dire. On peut donc, par le moyen de ces mêmes formules générales, reconnoître les cas où quelques-unes des équations seront comprises dans les autres.

90. Lorsqu'une question qui ne conduit qu'à des équations du 1^{er} degré est impossible, on s'en apperçoit à ce que la suite du calcul conduit à une absurdité; par exemple, conduit à dire, $4 = 3$.

Si l'on avoit, par exemple, les deux équations

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 30 \\ \& \ 20x + 12y &= 135. \end{aligned}$$

La première donneroit $x = \frac{30-3y}{5}$, & la seconde
 $x = \frac{135-12y}{20}$; égalant ces deux valeurs, on a $\frac{30-3y}{5}$

$= \frac{135-12y}{20}$; chassant les dénominateurs , on a $600 - 60y = 675 - 60y$ qui conduit à $600 = 675$, ce qui est absurde ; donc la question qui conduiroit aux deux équations $5x + 3y = 30$, & $20x + 12y = 135$, est impossible & absurde.

91. Les solutions négatives indiquent aussi une forte d'impossibilité dans la question ; mais cette impossibilité n'est pas absolue , elle est relative au sens dans lequel les quantités ont été prises ; en sorte qu'il y a un sens dans lequel ces solutions sont naturelles & admissibles ; voyez ce qui a été dit (70).

Des Problèmes indéterminés.

92. On appelle *Problème indéterminé* , toute question à laquelle on peut satisfaire en plusieurs manières , sans pouvoir déterminer parmi toutes ces manières , quelle est celle qui donne lieu à la question. Ces sortes de problèmes ont toujours moins de conditions que d'inconnues ; & envisagés généralement , ils sont susceptibles d'une infinité de solutions ; mais il arrive souvent aussi que le nombre de ces solutions est limité par quelques conditions qui ne pouvant pas être réduites en équations , ne permettent pas de déterminer d'une manière directe le nombre des solutions que la question peut avoir.

Si l'on propoisoit cette question : *Trouver deux*

*nombre*s qui pris ensemble fassent 24 ; en nommant x l'un de ces nombres, & y l'autre, on auroit $x + y = 24$, équation de laquelle on tire $x = 24 - y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x & y on entend indifféremment des nombres entiers ou des nombres fractionnaires, & des nombres positifs ou négatifs : il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, & de conclure la valeur de x de l'équation $x = 24 - y$, en y substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement ; ainsi si l'on suppose successivement $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{1}{2}$, &c., on aura $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{2}$, &c. Mais si l'on ne veut que des nombres entiers & positifs, alors le nombre des solutions est limité ; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant 0 : en sorte que supposant successivement $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, &c., on aura $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$, &c.

93. Mais, lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers & positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut

satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connoître.

Question première. On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 liv. & recevant en échange des pièces de 11 livres.

Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv., & par y celui des pièces de 11 liv.; en donnant x pièces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y , c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coefficient, & nous aurons $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier; on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier; on aura

$\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u+3 = 6t$ & $u = \frac{6t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s+3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en mettant pour t sa valeur $5s+3$, on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s+3$: & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s+6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s-40$; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s+6$, & $y = 17s-40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y , au lieu de s , tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini : ainsi

posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c., on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$$\begin{array}{rcl} x = 39 & y = 11 \\ = 50 & & = 28 \\ = 61 & & = 45 \\ = 72 & & = 62 \\ = 83, \text{ \&c.} & & = 79 \end{array}$$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x , & recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y , on paiera 542 livres.

Question seconde. *Faire 741 liv. en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 liv., de 19 liv. & de 10 livres.*

Soient x , y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces ; puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura, 1°. $x + y + z = 41$.

2°. Chaque pièce de la première espèce valant 24 liv., le nombre x de pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24x$; par la même raison y pièces de la seconde espèce vaudront $19y$, & z pièces de la troisième espèce vaudront $10z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes, monteront à $24x + 19y + 10z$; & comme elles doivent monter à 741 livres, on aura $24x + 19y + 10z = 741$.

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle ; de x , par exemple, & j'ai $x = 41 - y - z$, & $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$;

j'égalé ces deux valeurs, & j'ai $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$;

ou chassant le dénominateur, $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$; transposant & réduisant, on a $243 = 5y + 14z$.

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coefficient, & j'ai $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$, or y & z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3 - 4z}{5}$ soit un nombre entier: soit donc ι ce nombre entier; on aura $\frac{3 - 4z}{5} = \iota$, ou $3 - 4z = 5\iota$; donc $z = \frac{3 - 5\iota}{4} = -\iota + \frac{3 - \iota}{4}$; il faut donc que $\frac{3 - \iota}{4}$ soit un nombre entier: soit u ce nombre; on aura $\frac{3 - \iota}{4} = u$, ou $3 - \iota = 4u$, & par conséquent $\iota = 3 - 4u$.

Remontons maintenant aux valeurs de y , z & x .

Puisqu'on vient de trouver $z = \frac{3 - 5\iota}{4}$, on aura en mettant pour ι sa valeur, $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; & puisqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$; en mettant pour z , sa valeur, on aura $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Enfin, puisqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. En sorte que les valeurs correspondantes de x , y & z , sont $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, & $z = 5u - 3$, dans lesquelles on peut mettre pour u , tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en résulte des nombres positifs pour

x , y & z : or cette condition emporte ces trois autres.
 1°. Que $9u$ soit plus grand que 13 ; ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$. 2°. Que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$; c'est-à-dire , plus petit que $4\frac{1}{4}$. 3°. Enfin que $5u$ soit plus grand que 3 , ou u plus grand que $\frac{3}{5}$, ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition : ainsi le nombre des solutions est donc très-limité , & se réduit à trois que l'on trouve, en donnant à u pour valeurs les nombres 2, 3 & 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 liv. en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marquées ci-dessous, & qu'on trouve, en mettant pour u , les nombres 2, 3 & 4, successivement dans chacune des valeurs de x , y & z .

x	y	z
5	29	7
14	15	12
● 23	1	17

Dans le cours des divisions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre le quotient plutôt au-dessous de sa véritable valeur, qu'au-dessus. Il est même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette dernière manière.

Par exemple, si j'avois l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure $y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19}$ en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ divisé par 19, en nombres entiers, je concludrois $y = 3x + 7 - \frac{5x + 6}{19}$ en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient est plus approchant, & que l'excédent $5x$ dont je

tiens compte en lui donnant le signe —, a un coefficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abrèger le calcul. Je fais ensuite $\frac{-5x+6}{19} = u$; & j'en conclus $x = \frac{6-19u}{5}$, & par la même raison, $x = 1 - 4u + \frac{1+u}{5}$. Faisant $\frac{1+u}{5} = t$, j'ai enfin $u = 5t - 1$; ce qui achève la solution plus promptement que si j'avois pris chaque quotient au-dessous de sa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-dessus, aux valeurs de x & de y , on trouvera $x = 5 - 19t$, & $y = 21 - 52t$, qui en donnant à t pour valeurs, tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les solutions positives de l'équation.

Des Équations du second degré à une seule inconnue.

94. On appelle *Équations du second degré*, celles dans lesquelles la plus haute puissance de l'inconnue, est cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à son quarré. Ainsi l'équation $5x^2 = 125$, est une équation du second degré, parce que dans le terme, $5x^2$ la quantité x est multipliée par elle-même.

95. Lorsque l'équation ne renferme d'autre puissance de l'inconnue, que le quarré, elle est toujours facile à résoudre : il suffit de dégager le quarré de l'inconnue, de tout ce qui peut le multiplier, ou le diviser, ou des quantités qui peuvent se
trouver

trouver jointes avec lui , par les signes $+$ ou $-$, ce qui se fait par les règles données (56 , 60 & 64); après quoi il n'y a plus qu'à tirer la racine quarrée de chaque membre.

Par exemple , de l'équation $5x^2 = 125$, je conclus , en divisant par 5 , $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, & tirant la racine quarrée de chaque membre , $x = 5$: car il est évident que si deux quantités sont égales , leurs racines quarrées seront aussi égales , & il est également clair que x est la racine quarrée de x^2 .

Pareillement si j'ai l'équation $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{3}x^2 + 7$; je chasse les fractions , & j'ai $25x^2 = 12x^2 + 105$; transposant , $25x^2 - 12x^2 = 105$, ou $13x^2 = 105$; divisant par 13 , $x^2 = \frac{105}{13}$; donc $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Ce signe $\sqrt{}$ marque qu'on doit tirer la racine quarrée. Lorsqu'on doit tirer la racine quarrée de la fraction , comme dans le cas présent , on fait descendre les jambes du signe $\sqrt{}$ (qu'on appelle *signe radical*), au-dessous de la barre qui sépare les deux termes de la fraction. Mais si l'on n'avoit à représenter que la racine quarrée de l'un ou de l'autre des deux termes de la fraction , le radical seroit tout entier au-dessus ou au-dessous de la barre de division ; ainsi pour marquer qu'on veut diviser par 3 , la racine quarrée de 40 , on écriroit $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

Si la quantité dont on doit tirer la racine quarrée , étoit complexe , on donneroit , au radical , une queue

qui recouvrît toute la quantité; par exemple, pour marquer la racine quarrée de $3ab + b^2$, on écrirait $\sqrt{3ab + b^2}$. Quelquefois aussi, sans donner une queue au radical, on renferme la quantité complexe, entre deux crochets, qu'on fait précéder du signe $\sqrt{}$, en cette manière $\sqrt{(3ab + b^2)}$.

96. Nous avons vu (24) que lorsque le multiplicande & le multiplicateur avoient tous deux le même signe, le produit avoit toujours le signe $+$; cela étant, lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité qui a le signe $+$, on doit indifféremment donner à cette racine quarrée le signe $+$ ou le signe $-$; ainsi dans l'équation précédente $x^2 = 25$, on peut, lorsqu'on tire la racine quarrée, dire également, qu'elle est $+5$, & qu'elle est -5 , parce que chacun de ces nombres multiplié par lui-même reproduit toujours $+25$; en sorte que la résolution de l'équation $x^2 = 25$ s'écrit ainsi $x = \pm 5$, ce qui se prononce en disant x égale plus ou moins 5, & équivaut à ces deux équations $x = +5$ & $x = -5$.

Pareillement pour la seconde équation ci-dessus, on écrirait $x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$ (*).

(*) On pourroit demander ici | mier membre? La réponse est, pourquoi nous ne donnons pas | qu'on le peut; mais cela ne aussi le double signe \pm au pre- | mène à rien de nouveau. Et

97. Lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité précédée du signe —, on couvre le tout, du radical, que l'on fait aussi précéder du double signe \pm ; ainsi si l'on avoit $x^2 = -4$, on écriroit $x = \pm \sqrt{-4}$; & quoiqu'on puisse tirer la racine quarrée de 4, qui est 2, il ne faudroit pas écrire $x = \pm 2$: il est essentiel ici de faire attention au signe — de la quantité qui est sous le radical.

98. Lorsqu'une équation conduit ainsi à tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on peut conclure que le problème qui a conduit à cette équation est impossible: en effet une quantité négative ne peut avoir de racine quarrée, ni exactement, ni par approximation; car il n'y a aucune quantité soit positive, soit négative, qui étant multipliée par elle-même puisse produire une quantité négative: il est bien vrai que — 4, par exemple, peut être considéré comme venant de + 2 multiplié

effet si l'on écrit $\pm x = \pm 5$, on en tire ces quatre équations $+x = +5$, $+x = -5$, $-x = +5$, $-x = -5$. La dernière, en changeant les signes, revient à la première, il en est de même de la troisième, relativement à la seconde.

Il faut se garder de considérer la valeur de x dans la première équation $x = 5$, comme étant

la même que dans la seconde $x = -5$, quoique ces deux valeurs soient exprimées par le même caractère ou la même lettre x , cette lettre x est un signe par lequel on représente la quantité que l'on cherche; il peut désigner des quantités différentes, comme le mot *Écu* désigne des quantités différentes, dans différens pays.

par -2 ; mais ces deux quantités ayant un signe différent , ne sont point égales , & par conséquent leur produit n'est pas un carré. Ainsi , lorsqu'on propose de tirer la racine carrée d'une quantité négative , on propose une chose absurde ; donc tout problème qui se réduira à une pareille opération , sera un problème impossible. C'est à ce caractère qu'on distingue l'impossibilité des questions du second degré.

Au reste , il ne faut pas pour cela , regarder , comme inutile , la considération des racines carrées des quantités négatives : il arrive assez souvent qu'une question quoique possible n'admet de solution que par le concours de pareilles quantités dans lesquelles à la fin , ce qu'il y a d'absurde , disparoît. On appelle ces sortes de quantités , *quantités imaginaires*. Ainsi $\sqrt{-a}$ est une quantité imaginaire ; $a + \sqrt{-b}$ est une quantité imaginaire.

99. Ce que nous venons de dire suffit pour la résolution des équations du second degré , lorsqu'il n'y a pas d'autres puissances de x que le carré. Mais outre le carré de l'inconnue , il peut encore y avoir (& cela arrive le plus souvent) la première puissance de l'inconnue multipliée ou divisée par quelque quantité connue , comme dans cette équation $x^2 - 4x = 12$. Alors l'artifice qu'on doit employer pour

résoudre l'équation , consiste à préparer le premier membre de manière à en faire un carré parfait : cette préparation suppose , avant tout , trois choses ; 1°. qu'on ait passé dans un seul membre tous les termes affectés de x , & les quantités connues dans l'autre ; cela s'exécute par ce qui a été dit (56) : 2°. Que le terme qui renferme x^2 , soit positif ; s'il avoit le signe — , on changeroit tous les signes de l'équation , ce qui ne troubleroit point l'égalité : 3°. Que le terme qui renferme x^2 , soit libre de tout multiplicateur ou de tout diviseur ; s'il n'étoit point dans cet état , on l'y amèneroit , en multipliant tous les autres termes de l'équation par ce diviseur , & en les divisant par le multiplicateur.

Par exemple , si j'avois à résoudre l'équation $4x - \frac{2}{3}x^2 = 4 - 2x$, 1°. je passerois tous les x dans le premier membre , en écrivant le terme x^2 le premier , & j'aurois $-\frac{2}{3}x^2 + 4x + 2x = 4$, ou $-\frac{2}{3}x^2 + 6x = 4$; 2°. je changerois les signes pour rendre x^2 positif , & j'aurois $\frac{2}{3}x^2 - 6x = -4$; 3°. je multiplierois par 3 , ce qui me donneroit $2x^2 - 18x = -12$; enfin je diviserois par 2 , & j'aurois $x^2 - 9x = -6$.

Comme on peut toujours ramener , à cet état , toute équation du second degré , nous ne nous occuperons actuellement que d'une équation préparée de cette manière.

100. Cela posé , pour résoudre une équation du second degré , il faut suivre cette règle :

H 3

Prenez la moitié de la quantité connue qui multiplie x dans le second terme : élevez cette moitié au quarré , & ajoutez ce quarré à chaque membre de l'équation , ce qui ne changera rien à l'égalité. Le premier membre sera alors un quarré parfait. Tirez la racine quarrée de chaque membre , & faites précéder celle du second membre , du double signe \pm ; l'équation sera réduite au premier degré.

Quant à la manière de tirer la racine quarrée du premier membre , on tirera la racine quarrée du quarré de l'inconnue , & celle du quarré qu'on a ajouté : on joindra cette seconde à la première , par le signe qu'aura le second terme de l'équation.

Par exemple , ayant l'équation $x^2 + 6x = 16$, je prends la moitié de la quantité connue 6 , qui multiplie x dans le second terme : je quarre cette moitié , & j'ajoute à chaque membre le quarré 9 ; j'ai $x^2 + 6x + 9 = 25$; il ne s'agit plus que de tirer la racine quarrée , ce que je fais en prenant la racine quarrée de x^2 qui est x , puis celle de 9 qui est 3 ; & comme le second terme $6x$ de l'équation a le signe $+$, j'en conclus que $x + 3$, est la racine quarrée du premier membre ; quant à celle du second , elle est 5 ou plutôt $(96) \pm 5$; par conséquent $x + 3 = \pm 5$. Pour avoir x , il ne s'agit plus que de transposer , & l'on aura $x = \pm 5 - 3$; c'est-à-dire , que x a deux valeurs ; savoir $x = + 5 - 3 = 2$, & $x = - 5 - 3 = - 8$. Nous verrons ci-après ce que signifie cette seconde valeur.

Pour entendre la raison de cette règle , il faut se rappeler ce que nous avons remarqué (25) ,

savoir que le quarré d'une quantité composée de deux termes , contient toujours le quarré du premier terme , le double du premier terme multiplié par le second , & le quarré du second.

Cela posé , lorsqu'il s'agit d'ajouter à une quantité telle que $x^2 + 6x$, ce qui est nécessaire pour en faire un quarré parfait , il faut remarquer 1°. que cette quantité contient déjà un quarré x^2 qu'on peut considérer comme le quarré du premier terme x d'un binome. 2°. Qu'on peut toujours considérer le terme suivant $6x$, comme étant le double de x multiplié par une autre quantité. 3°. Que cette autre quantité est nécessairement la moitié de 6 multiplicateur de x . Il ne manque donc plus que le quarré de cette seconde quantité , c'est-à-dire , le quarré de la moitié du multiplicateur de x dans le second terme. On voit que ce raisonnement est général , quel que soit le multiplicateur de x .

Quant à la règle que nous donnons en même temps pour extraire la racine quarrée du premier membre , elle est également une suite de la formation du quarré ; puisque les deux quarrés extrêmes qui se trouvent dans le quarré d'un binome étant les quarrés des deux termes de la racine , il est évident qu'il ne s'agit que de tirer séparément les racines de ces deux quarrés , pour avoir ces deux

termes. Mais on doit donner au second terme de la racine le même signe qu'à le second terme de l'équation, parce que de même que le calcul fait voir que le quarré de $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$, de même il fait voir que le quarré de $a - b$ est $a^2 - 2ab + b^2$.

Application de la Règle précédente, à la Résolution de quelques questions du second degré.

101. De quelque degré que doive être l'équation, il faut toujours, pour mettre la question en équation, faire usage de la règle que nous avons donnée (67).

Question première : *Trouver un nombre tel que si à son quarré, on ajoute 8 fois ce même nombre, le tout fasse 33 ?*

Si je connoissois ce nombre, que j'appelle x , il est évident que j'en prendrois le quarré x^2 ; qu'à ce quarré, j'ajouterois 8 fois ce nombre, c'est-à-dire, $8x$, & que le tout $x^2 + 8x$ formeroit 33; il faut donc que $x^2 + 8x = 33$.

Pour résoudre cette équation, j'ajoute à chaque membre le nombre 16, qui est le quarré de la moitié du nombre 8 qui multiplie x dans le second terme, & j'ai $x^2 + 8x + 16 = 49$; équation dont le premier membre est un quarré parfait. Je tire la racine quarrée de chaque membre, en observant la règle donnée (100), & j'ai $x + 4 = \pm 7$; par conséquent $x = \pm 7 - 4$, qui donne ces deux valeurs de x , $x = + 7 - 4 = 3$, & $x = - 7 - 4 = - 11$.

De ces deux valeurs, la première satisfait à la question, puisque 9 qui est le carré de 3, étant ajouté à 8 fois 3 ou 24, fait 33. A l'égard de la seconde, comme elle est négative, elle indique qu'il y a une autre question dans laquelle prenant x dans un sens tout contraire, la solution seroit 11 ; c'est-à-dire, que la seconde valeur de x doit satisfaire à cette autre question : *Trouver un nombre tel que si de son carré, on retranche 8 fois ce même nombre, le reste soit 33* : ce qui est en effet, car le carré de 11 est 121, & 8 fois 11 font 88, lesquels retranchés de 121, il reste 33.

Pour confirmer ce que nous avons dit sur les quantités négatives (70), remarquons que cette seconde question mise en équation, donne $x^2 - 8x = 33$, laquelle étant résolue selon la règle, donne $x = \pm 7 + 4$; c'est-à-dire, ces deux valeurs $x = 11$ & $x = -3$, qui sont précisément le contraire de celles de la première question.

102. On voit par-là qu'une équation du second degré, à une seule inconnue, a toujours deux solutions. Car les deux valeurs 11 & -3 substituées, au lieu de x , dans l'équation $x^2 - 8x = 33$, la résolvent également, c'est-à-dire, réduisent également le premier membre à 33. On vient de le voir pour 11. A l'égard de -3 , son carré est $+9$; & 8 fois -3 , font -24 , qui, retranchés de $+9$, donnent $+9 + 24$, selon ce qui a été enseigné (11).

Mais on voit en même temps que si toute équation du second degré a deux solutions, il n'en est pas toujours de même de la question qui a conduit à cette équation ; car, dans le cas présent, la seconde valeur -3 , ne résout que la question contraire. Au reste ; il arrive souvent que les deux solutions de l'équation, sont aussi toutes deux, solutions de la question. Nous en verrons un exemple dans la troisième question.

Question seconde. *On devoit partager 175 livres entre un certain nombre de personnes ; mais il y en a deux d'absentes & qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de 10 livres la part de chaque présent ; on demande combien il devoit d'abord y avoir de partageans.*

Si je savois quel est ce nombre, je diviserois 175 par ce nombre, pour connoître combien chacun auroit eu, si toutes les personnes eussent été présentes. Je diviserois ensuite par ce même nombre diminué de 2, pour connoître combien chaque partageant aura réellement ; enfin je verrois si en ôtant 10 livres de ce second quotient, le reste est égal au premier. Imitons ces opérations, en représentant par x le nombre cherché.

Si tous étoient présens, chacun auroit donc $\frac{175}{x}$; mais s'il manque deux personnes, chaque partageant aura $\frac{175}{x-2}$; puis donc que ce dernier nombre doit être plus grand de 10, que le premier, il faut que $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Pour résoudre cette équation, je chasse les dénominateurs ; & selon la remarque faite (66), j'écris $175x - 10x \times (x-2) = 175 \times (x-2)$, puis faisant les opérations indiquées, j'ai $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$; supprimant $175x$ de part & d'autre : puis changeant les signes (99), on a $10xx - 20x = 350$; enfin divisant par 10, il vient $xx - 2x = 35$, équation à laquelle il ne s'agit plus que d'appliquer la règle donnée (100). Je prends donc la moitié — 1 du multiplicateur — 2 de x . Je quarre cette moitié ; ce qui me donne + 1, que j'ajoute à chaque membre, & j'ai $x^2 - 2x + 1 = 36$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - 1 = \pm 6$, & par conséquent $x = \pm 6 + 1$, qui donne $x = 7$ &

$x = -5$. La première est le nombre cherché : car 175 divisé par 7, donne 25 ; & 175 divisé par $7 - 2$ ou 5, donne 35 qui excède 25 de 10. Quant à la seconde, elle résout la question où l'on supposeroit qu'il s'agit de partager 175 livres avec deux nouveaux survenus, & que cette circonstance diminue de 10 livres la part que chacun auroit en sans cela.

Question troisième. *Un homme achète un cheval, qu'il vend, au bout de quelque temps, pour 24 pistoles. A cette vente, il perd autant pour cent que le cheval lui avoit coûté. On demande combien il l'avoit acheté ?*

Si l'on me disoit ce que le cheval a coûté, je vérifierois ce nombre en cette manière. Je le retrancherois de 100, & je ferois cette règle de trois : Si 100 se réduisent au nombre que vient de me donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire ? Ayant trouvé ce quatrième terme, il devroit être égal à 24.

Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire, le nombre de pistoles que le cheval a coûté. Alors puisque 100 sont supposés se réduire à $100 - x$; je trouverai à combien x doit être réduit, en faisant cette règle de trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera $\frac{(100 - x)x}{100}$ (*Arith.* 179) ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pistoles, il faut que $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Pour résoudre cette équation, je chasse le dénominateur, & j'ai $100x - xx = 2400$, ou en changeant les signes $xx - 100x = -2400$. Je prends donc (100) la moitié de -100 qui est -50 ; je l'élève au quarré, ce qui me

donne $+ 2500$ à ajouter à chaque membre. L'équation devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - 50 = \pm 10$, & par conséquent, $x = 50 \pm 10$, qui donne ces deux valeurs $x = 60$ & $x = 40$, dont chacune résout la question; en sorte que le prix du cheval peut également avoir été de 60 ou de 40 pistoles; l'énoncé de la question n'est pas suffisant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu. Si l'on veut vérifier ces deux solutions, on verra qu'en supposant que le cheval a été acheté 60 pistoles, puisqu'alors 100 se réduisent à 40, 60 se réduiront à 24. Et dans le second cas, on verra de même, que 100 se réduisant à 60, 40 se réduiront à 24.

103. Dans les questions précédentes, l'équation a eu deux solutions, l'une positive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux positives. Elle peut en avoir aussi deux négatives. Mais cela n'arrive que lorsque l'énoncé de la question est vicieux; car alors chacune de ces deux solutions négatives, indique (70) que l'inconnue doit être prise dans un sens tout opposé à celui de l'énoncé. Par exemple, si l'on proposoit cette question; Trouver un nombre tel que si à son quarré on ajoute neuf fois ce même nombre, & encore le nombre 50, le tout fasse 30; cette question mise en équation donneroit $x^2 + 9x + 50 = 30$, qui en suivant les règles données plus haut, deviendrait successivement $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; tirant la racine quarrée $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, qui donne $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, & $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$. Ce qui indique que la question doit être changée en cette autre: Trouver un nombre tel que si après avoir ajouté 50 à son quarré, on retranche du tout, 9 fois ce même nombre demandé, il reste 30.

104. L'Algèbre a donc cet avantage , que non-seulement elle résout les questions , mais elle fait encore distinguer si elles sont bien ou mal proposées ; & si elles sont impossibles , elle le fait connoître aussi : nous en avons déjà donné le caractère (98).

Si l'on en veut un exemple , il n'y a qu'à résoudre la question troisième ; en y supposant vingt-six pistoles au lieu de vingt-quatre. L'équation sera $\frac{100x - xx}{100} = 26$, ou $100x - xx = 2600$, ou $xx - 100x = -2600$, qui, selon la règle (100), devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$, tirant la racine quarrée $x - 50 = \pm \sqrt{-100}$, & enfin $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; or nous avons vu (98) que la racine quarrée d'une quantité négative est impossible.

Question quatrième. Deux personnes se sont réunies dans un commerce : l'une a mis 30 louis qui ont resté 17 mois dans la société. Le second n'a fourni ses fonds qu'au bout de 5 mois ; c'est-à-dire , qu'ils n'ont été que 12 mois dans la société. Ces fonds que l'on ne connoît point , sont , avec le gain qui lui revient , 26 louis. Le gain total a été de 18 louis & $\frac{3}{4}$; on demande ce que le second avoit mis , & combien chacun a gagné ?

La question se réduit à trouver la mise du second ; car il est évident que le gain de chacun sera facile à trouver ensuite. Représentons cette mise , ou le nombre de louis de cette mise , par x . Puisque les 30 louis du premier ont été 17 mois dans la société , ils doivent lui avoir produit autant que produiroient 17 fois 30 louis ou 510 louis pendant un mois. Pareillement , puisque la mise x du second a été 12 mois dans la société , elle doit lui avoir produit autant que

12 fois x de louis ou $12x$ produiroient pendant un mois; ainsi, on peut regarder la société, comme n'ayant duré qu'un mois, mais en supposant que les mises aient été 510 & $12x$; cela étant, pour savoir ce que le second doit gagner, il faut (*Arith.* 197) calculer le quatrième terme de cette proportion $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$

Ce quatrième terme fera $\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}$, qui revient à $\frac{225x}{510 + 12x}$; or il est dit dans la question que le gain du second & sa mise x font 26 louis; donc $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Pour résoudre cette équation, chassons le dénominateur, & nous aurons $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, ou, en faisant les multiplications indiquées, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Transposant & réduisant, on a $12xx + 423x = 13260$; divisant par 12, $x^2 + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$ qui se réduit à $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; prenant donc la moitié de $\frac{141}{4}$, qui est $\frac{141}{8}$; élevant cette moitié au carré, & l'ajoutant à chaque membre, on aura $x^2 + \frac{141}{4}x + \frac{12881}{64} = \frac{12881}{64} + 1105 = \frac{20601}{64}$, en réduisant 1105 en fraction. Tirant donc la racine quarrée, on aura $x + \frac{141}{8} = \pm \sqrt{\frac{20601}{64}} = \pm \frac{101}{8}$; donc $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{101}{8}$; qui donne pour la seule valeur, qui satisfasse à la question, $x = \frac{-141 + 101}{8} = \frac{-40}{8} = -5$; la mise du second étoit donc de 5 louis; par conséquent son gain étoit de 6, & celui du premier de $12\frac{3}{4}$.

105. A l'égard des équations littérales, la règle est absolument la même. Si l'on avoit à résoudre

l'équation $abx - axx = b^2c$; conformément à ce qui a été dit (99 & 100) , je changerois cette équation en $axx - abx = -b^2c$, puis en $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; j'ajouterois à chaque membre le carré de $-\frac{b}{2}$; c'est-à-dire , $+\frac{bb}{4}$, & j'aurois $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; tirant la racine carrée , j'ai $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$, & enfin $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

106. Lorsque l'équation est littérale , elle peut se présenter sous une forme plus composée que nous ne l'avons vue jusqu'ici ; mais on peut toujours la ramener à trois termes en cette manière.

Soit l'équation $ax^3 + bcx - a^2b = bx^3 - ab^2 - acx$. Je passe dans un seul membre tous les termes affectés de x , en observant d'écrire de suite , tous ceux qui ont les mêmes puissances de x , & j'ai $ax^3 - bx^3 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Je remarque , à présent , que $ax^3 - bx^3$ n'est autre chose que $(a - b) \times x^3$, ou $(a - b)x^3$; pareillement $bcx + acx$ n'est autre chose que $(bc + ac)x$, en sorte que l'équation $ax^3 - bx^3 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ peut s'écrire ainsi $(a - b)x^3 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$; or les quantités a , b , c étant des quantités connues , on doit regarder $a - b$, $bc + ac$, & $a^2b - ab^2$ comme des quantités toutes connues ; on peut donc , pour abréger , représenter chacune de ces quantités

par une seule lettre, & supposer $a - b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, & alors l'équation est réduite à $mx^2 + nx = p$, qui est dans le cas des précédentes, & qui étant résolue suivant les mêmes règles, deviendra successivement $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, puis $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (en ajoutant le quarré de la moitié de $\frac{n}{m}$, c'est-à-dire, de $\frac{n}{2m}$); tirant la racine quarrée, $x + \frac{n}{2m} = \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; enfin $x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$.

107. Au reste on ne fait ces sortes de transformations que lorsque le calcul qu'on auroit à faire sans elles, seroit très-composé; car dans ce même exemple, après avoir mis l'équation proposée, sous la forme $(a - b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$, on peut la traiter, sans trop de calcul, comme les précédentes, en divisant d'abord par $a - b$, ce qui donne $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b}x = \frac{a^2b - ab^2}{a - b}$; maintenant il faut ajouter de part & d'autre le quarré de la moitié de $\frac{bc + ac}{a - b}$, c'est-à-dire, le quarré de $\frac{bc + ac}{2a - 2b}$; mais on peut se contenter de l'indiquer en cette manière $\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2$; ainsi on aura $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b}x + \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 = \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}$; tirant la racine quarrée, on aura.

$$x + \frac{bc + ac}{2a - 2b} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}\right]},$$

$$\text{\& enfin } x = \frac{-bc - ac}{2a - 2b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}\right]}.$$

108. Quoiqu'on puisse , lorsqu'on a conclu la valeur de x , laisser le radical dans l'état où il est , jusqu'à ce qu'on vienne aux applications numériques ; néanmoins , il peut être souvent utile de lui donner une forme plus simple , en réduisant au même dénominateur les deux parties qui se trouvent sous ce radical. Sur quoi il faut observer qu'on peut souvent les réduire au même dénominateur d'une manière plus simple que par la règle générale donnée (47) , & cela en se conformant aux observations que nous avons faites (48).

Prenons , pour exemple , $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$: pour réduire à un même dénominateur les deux quantités $\frac{n^2}{4m^2}$ & $\frac{p}{m}$, j'observe que leurs dénominateurs actuels ont un facteur commun m , & que par conséquent , si je multipliois les deux termes de la fraction $\frac{p}{m}$, par $4m$ qui est le second facteur du premier dénominateur , alors elle auroit le même dénominateur que cette première fraction ; c'est pourquoi je change $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$ en $\sqrt{\left(\frac{n^2 + 4pm}{4m^2}\right)}$; or comme le radical marque qu'il faut tirer la racine quarrée de la fraction , c'est-à-dire (*Arith.* 142) du numérateur & du dénominateur ; je tire celle du dénominateur qui est un quarré ; & j'ai $\frac{\sqrt{n^2 + 4pm}}{2m}$; ainsi dans l'équation ci-dessus où nous avons trouvé $x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$, on peut changer cette valeur de x en cette autre $x =$

$\frac{-n}{2m} \pm \frac{\sqrt{(n^2 + 4pm)}}{2m}$, ou à cause du dénominateur commun $2m$, en cette autre $x = \frac{-n \pm \sqrt{(n^2 + 4pm)}}{2m}$.

De l'Extraction de la racine quarrée des quantités littérales.

109. La résolution des équations du second degré conduit donc , comme nous venons de le voir , à extraire la racine quarrée des quantités , soit numériques , soit littérales. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des premières en Arithmétique. Nous allons parler des dernières.

Lorsqu'il a été question de la multiplication des quantités monomes (18) , nous avons dit que le produit renfermoit toutes les lettres du multiplicande & toutes celles du multiplicateur ; or , lorsqu'on élève une quantité au quarré , le multiplicande & le multiplicateur sont les mêmes ; donc , dans un quarré monome , chacune des lettres de la racine doit être deux fois facteur ; donc l'exposant de chacune des lettres d'un quarré monome doit être double de celui des mêmes lettres dans la racine ; donc *pour avoir la racine quarrée d'une quantité monome , il faut donner à chacune des lettres de cette quantité , un exposant moitié moindre* ; suivant cette règle , la racine quarrée de a^2 est a , celle de a^6 est a^3 , celle de $a^2 b^2 c^2$ est abc , celle de $a^4 b^6 c^8$ est $a^2 b^3 c^4$.

110. S'il se trouvoit un exposant impair, ce seroit donc un signe que la quantité proposée n'est point un carré parfait; alors, en suivant la règle, il resteroit un exposant fractionnaire qui désigneroit qu'il reste à tirer la racine carrée de la quantité qui auroit cet exposant. Ainsi, la racine carrée de $a^2 b^3 c^4$ est $a b^{\frac{3}{2}} c^2$ ou $a b b^{\frac{1}{2}} c^2$: car on peut considérer $a^2 b^3 c^4$ comme $a^2 b^2 b c^4$.

L'exposant fractionnaire a donc ici le même usage que le signe $\sqrt{}$; ainsi $a b b^{\frac{1}{2}} c^2$, ou (ce qui est la même chose) $a b c^2 b^{\frac{1}{2}}$ équivaut à $a b c^2 \sqrt{b}$. Donc réciproquement, si une quantité monome est affectée du signe $\sqrt{}$, on pourra supprimer ce radical, pourvu qu'on prenne la moitié de chacun des exposans.

111. Cette remarque sert à simplifier les quantités affectées du signe $\sqrt{}$, lorsque cela est possible. Par exemple, la quantité $\sqrt{a^2 b^3 c}$ étant la même chose que $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, se réduit à $a b b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, ou, en remettant le radical, au lieu des exposans fractionnaires, à $a b \sqrt{b c}$. De même $\sqrt{a^5 b^4 c^3}$ se réduit à $a^2 b^2 c \sqrt{a c}$, en considérant $a^5 b^4 c^3$ comme $a^4 b^4 c^2 a c$, & prenant la moitié des exposans 4, 4 & 2. On trouvera de même que $\sqrt{\frac{a^3}{f}}$ se réduit à $a \sqrt{\frac{a}{f}}$; ou bien

si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par f , se réduit à $a \sqrt{\frac{af}{f^2}}$, ou enfin à $\frac{a}{f} \sqrt{af}$.

112. On voit donc que pour faire sortir hors du radical les facteurs que l'on peut en faire sortir, il faut prendre la moitié des exposans de ces facteurs. Au contraire pour faire entrer sous le radical un facteur qui seroit au dehors, il faudra doubler l'exposant de ce facteur, c'est-à-dire, élever ce facteur au quarré. Ainsi $a \sqrt{b}$ peut être changé en $\sqrt{a^2 b}$; $a \sqrt{\frac{b}{a}}$ peut être changé en $\sqrt{\frac{a^2 b}{a}}$ qui se réduit à \sqrt{ab} . De même $(a + b) \sqrt{c}$ peut être changé en $\sqrt{(a + b)^2 c}$.

113. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient. S'il y en avoit un, & qu'il fût un quarré parfait, on en tireroit la racine quarrée selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $\sqrt{9a^2 b^3}$ devient $3ab\sqrt{b}$. De même, $\sqrt{1024a^2 b^3 c}$ devient $32ab\sqrt{bc}$.

114. Mais si le coefficient n'étoit point un quarré parfait, il faudroit voir s'il ne peut pas être décomposé en deux facteurs dont l'un soit un quarré parfait dont on tireroit la racine, & on laisseroit l'autre sous le radical; c'est ainsi que $\sqrt{48a^2 b^3}$ se réduit à $4ab\sqrt{3b}$, parce que 48 étant $= 16 \times 3$, $\sqrt{48a^2 b^3} = \sqrt{16 \times 3a^2 b^3}$, ou $= \sqrt{16a^2 b^2 \times 3b} = 4ab\sqrt{3b}$.

On trouvera de même que $\sqrt{512 a^3 b^2}$ se réduit à $16 ab \sqrt{2a}$.

115. Si la quantité affectée du signe radical, est complexe, & n'est point un carré parfait, il faut examiner si elle ne peut pas être décomposée en deux facteurs, dont l'un seroit un carré parfait; alors on tireroit la racine de celui-ci, & on laisseroit l'autre sous le radical. Lorsque le facteur carré, s'il y en a, est monome, il est toujours facile à appercevoir. Par exemple, dans la quantité $\sqrt{4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5}$, je vois que b^2 est facteur de tous les termes, en sorte que cette quantité équivaut à cette autre $\sqrt{[(4a^3 - 5a^2b + 6b^3) \times b^2]}$; je tire donc la racine carrée de b^2 , & j'ai $b \sqrt{4a^3 - 5a^2b + 6b^3}$.

116. Mais lorsque ce facteur carré doit être complexe, ou lorsque la quantité complexe qui est sous le radical, est elle-même un carré, il faut bien se garder, pour en avoir la racine, de tirer séparément la racine carrée de chacun des termes qui la composent. Par exemple, si l'on avoit $a^2 + b^2$, on se tromperoit beaucoup si l'on prenoit $a + b$ pour cette racine, puisque le carré de $a + b$ n'est pas $a^2 + b^2$, mais $a^2 + 2ab + b^2$ (25). $a^2 + b^2$ n'a point de racine exacte en lettres. Voici la méthode qu'il

faut suivre lorsque la quantité complexe proposée est susceptible d'une racine exacte.

117. Soit donc la quantité $60ab + 36a^2 + 25b^2$. Pour en avoir la racine quarrée, j'ordonne les termes de cette quantité par rapport à l'une de ses lettres : par rapport à a , par exemple,

$$\begin{array}{r}
 36a^2 + 60ab + 25b^2 \\
 - 36a^2 \\
 \hline
 + 60ab + 25b^2 \\
 - 60ab - 25b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 6a + 5b \text{ Racine.} \\ \hline 12a + 5b \end{array} \right.$$

Je prends la racine quarrée du premier terme $36a^2$, laquelle est $6a$ que j'écris à côté de la quantité proposée.

Je quarre cette racine & j'écris le quarré $36a^2$ sous le premier terme, avec le signe —, pour le retrancher. La réduction faite, il reste $+ 60ab + 25b^2$.

Sous la racine $6a$ j'écris son double $12a$ que j'emploie pour diviser le premier terme $60ab$ de la quantité restante $60ab + 25b^2$. Je trouve pour quotient $+ 5b$ que j'écris à la suite de la racine $6a$, & j'ai $6a + 5b$ pour la racine cherchée ; mais pour confirmer cette opération, j'écris aussi le quotient $5b$ que je viens de trouver, à côté de $12a$, & je multiplie le total $12a + 5b$ par ce même quotient $5b$; je porte à mesure, les produits, sous la quantité $60ab + 25b^2$, en observant de changer les signes de ces produits ; faisant ensuite la réduction, il ne reste rien ; j'en conclus que la racine trouvée $6a + 5b$ est la racine quarrée exacte de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 - 4a^2 \\
 \hline
 1^{\text{re}} \text{ Reste } - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 \quad + 12ab \qquad \qquad - 9b^2 \\
 \hline
 2^{\text{de}} \text{ Reste } \qquad + 16ac - 24bc + 16c^2 \\
 \qquad \qquad - 16ac + 24bc - 16c^2 \\
 \hline
 \text{Dernier Reste.} \dots\dots\dots 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 2a - 3b + 4c \text{ Racine.} \\ \hline 4a - 3b \\ 4a - 6b + 4c \end{array} \right.$$

Je tire la racine quarrée de $4a^2$: elle est $2a$, que j'écris à côté. Je quarre $2a$, & je l'écris, avec le signe $-$, sous $4a^2$; faisant la réduction, il reste $-12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

Au-deffous de la racine $2a$, j'écris son double $4a$, que j'emploie pour diviser le premier terme $-12ab$ du reste: je trouve pour quotient $-3b$, que j'écris à la suite du premier terme $2a$ de la racine: je l'écris auffi à côté du double $4a$, & je multiplie le tout $4a - 3b$, par le même quotient $-3b$; écrivant les produits, après avoir changé leurs fignes, fous le reste $-12ab + 16ac$, &c.; & faifant la réduction, j'ai pour fecond reste, $+16ac - 24bc + 16c^2$.

Je considère à présent les deux termes de la racine $2a - 3b$, comme ne faisant qu'une seule quantité, je double cette quantité, & je l'écris au-dessous pour servir de diviseur au second reste; mais pour faire cette division, je me contente, selon ce qui a été dit (36), de diviser le premier terme $+ 16ac$; par le premier terme $+ 4a$ de mon diviseur; je trouve pour quotient $+ 4c$, que j'écris à la

suite de la racine $2a - 3b$, & à la suite du double $4a - 6b$: je multiplie cette dernière somme $4a - 6b + 4c$, par le nouveau terme $+ 4c$ de la racine ; & changeant, à mesure, les signes des produits, j'écris ces mêmes produits sous le second reste ; faisant la soustraction, il ne reste rien. D'où je conclus que la racine trouvée est exacte.

Tout cela est fondé sur ce principe, que le carré d'une quantité composée de deux parties, contient le carré de la première, le double de la première multipliée par la seconde, & le carré de la seconde ; car il suit de-là, que pour avoir la première partie, il faudra tirer la racine carrée du premier carré ; que pour avoir la seconde, il faudra diviser le terme suivant, par le double de la racine trouvée ; & qu'enfin pour vérifier, il faudra multiplier le double de la première par la seconde, & la seconde par elle-même ; or c'est ce que prescrit la méthode que nous venons d'exposer.

Nous invitons les Commencans à s'exercer encore sur les trois quantités suivantes : 1°. $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$.
2°. $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$.
3°. $a^6 - 4a^3c^3 + 8a^3c^3 + 4c^6 - 16c^3c^3 + 16c^6$, dont ils trouveront que les racines carrées sont $4a^2 + 5ab$, $6b^2 - 5ab - 3c^2$, $a^3 - 2c^3 + 4c^3$.

Du calcul des quantités affectées du signe $\sqrt{}$.

118. On fait sur les quantités radicales dont nous venons de parler, les mêmes opérations que sur les autres quantités. Lorsque les deux quantités radicales ne sont pas semblables, on se contente, pour les

ajouter ou les soustraire, de les unir par le signe $+$ ou le signe $-$. Ainsi $3a\sqrt{b}$ ajouté avec $4b\sqrt{c}$, donne $3a\sqrt{b} + 4b\sqrt{c}$; de même $3a\sqrt{b}$ retranché de $4b\sqrt{c}$, donne $4b\sqrt{c} - 3a\sqrt{b}$. Mais si les quantités radicales sont semblables & ne diffèrent que par le coefficient numérique hors du radical, alors on ajoute ou l'on retranche les coefficients, selon qu'il s'agit d'addition ou de soustraction. Par exemple, $4ab\sqrt{c}$, ajouté avec $5ab\sqrt{c}$, donne $9ab\sqrt{c}$.

Nous supposons ici qu'on a réduit les radicaux selon ce qui a été enseigné (112); car si l'on avoit $4b\sqrt{a^3c}$ à ajouter avec $6a\sqrt{ab^2c}$; je commencerois par réduire le premier radical à $4ab\sqrt{ac}$, & le second à $6ab\sqrt{ac}$, lesquels ajoutés, donnent $10ab\sqrt{ac}$.

Pour multiplier deux quantités radicales, il faut multiplier comme s'il n'y avoit point de radicaux, & affecter ensuite le produit, du signe radical.

Par exemple, pour multiplier \sqrt{a} par \sqrt{c} , je multiplierai a par c , & donnant au produit ac , le signe $\sqrt{}$, j'aurai \sqrt{ac} . Pour multiplier $\sqrt{a^2 + b^2}$ par \sqrt{ac} , j'aurai $\sqrt{a^3c + ab^2c}$. De même $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$; $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ (*). On voit donc que

(*) Il ne faut pas confondre $\sqrt{(-a)^2}$ avec $\sqrt{-aa}$; le premier est $\sqrt{(-a) \times (-a)}$, & le second est $\sqrt{-a \times +a}$. Nous ferons, à cette occasion, une remarque que nous croyons

pour quarrer une quantité affectée du signe $\sqrt{}$, il n'y a autre chose à faire qu'à ôter ce signe ; ainsi pour quarrer $\sqrt{(a^2b + b^3)}$, j'aurai $a^2b + b^3$.

119. Cette remarque peut servir à dégager une équation des signes $\sqrt{}$, qu'elle peut renfermer. Par exemple, si j'avois l'équation $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, je laisserois \sqrt{ax} seul dans un membre, & j'aurois $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; alors, quarrant chaque membre, j'aurois $x^2 - 4ax - 2bx + 4aa + 4ab + bb = ax$, ou en transposant, $x^2 - 5ax - 2bx = -4aa - 4ab - bb$.

120. Pour diviser une quantité radicale, par une autre quantité radicale, on divisera comme s'il n'y avoit pas de signe $\sqrt{}$, & on donnera au quotient ou à la fraction, le signe radical ; ainsi pour diviser

très à propos. Puisque $-a \times -a$ donne $+a^2$, dont (96) la racine est $\pm a$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ devroit donc donner $\pm a$; cependant nous ne donnons ici que $-a$. La raison en est simple. Quand on demande quelle est la racine de $+a^2$, on a raison d'assigner également $+a$ & $-a$; parce que rien dans cette question ne détermine, si l'on considère $+a^2$, comme venu de $+a \times +a$, ou de $-a \times -a$; mais quand on demande quelle est la valeur de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$; quoique cette

quantité, selon les règles, se réduise à $\sqrt{+a^2}$, on ne doit prendre que $-a$, parce que la question elle-même fixe ici par quelle opération est venu $+a^2$. C'est en faisant cette attention qu'on remarquera que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ doit donner $-\sqrt{ab}$, & non pas $\pm \sqrt{ab}$; parce que $\sqrt{-a}$ étant la même chose que $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, & $\sqrt{-b}$, la même chose que $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ sera $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, ou $\sqrt{ab} \times \sqrt{(-1)^2}$, qui revient à $-\sqrt{ab}$, puisque $\sqrt{(-1)^2} = -1$.

\sqrt{a} par \sqrt{b} , on divisera a par b , ce qui donnera $\frac{a}{b}$, auquel appliquant le radical, on aura $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Pour diviser \sqrt{ab} par \sqrt{a} , on divisera ab par a , ce qui donnera b , & on aura \sqrt{b} pour quotient. Pour diviser $\sqrt{(aa - xx)}$ par $\sqrt{(a + x)}$, on divisera $aa - xx$ par $a + x$, ce qui donnera $a - x$, & on aura $\sqrt{(a - x)}$ pour le quotient demandé. De même $ab\sqrt{bc}$ divisé par $a\sqrt{b}$, donnera $b\sqrt{c}$, en divisant ab par a , & \sqrt{bc} par \sqrt{b} .

121. Si le dividende ou le diviseur étoit rationnel, on sépareroit l'un de l'autre par une barre assez longue pour faire connoître que l'un des deux n'est pas affecté du radical. Par exemple, pour diviser a par \sqrt{b} , on écriroit $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Pour diviser a par \sqrt{a} , on écriroit $\frac{a}{\sqrt{a}}$; mais lorsqu'il y a une parité dans les lettres du dividende & du diviseur, il est souvent à propos de donner à la quantité rationnelle une forme de radical, parce qu'elle donne lieu à des simplifications; ainsi dans le dernier exemple, je changerois a en $\sqrt{a^2}$, & alors au lieu de $\frac{a}{\sqrt{a}}$ j'aurois $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$, & par conséquent \sqrt{a} . De même si j'avois $\sqrt{(aa - xx)}$ à diviser par $a + x$, j'écrirois $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{a + x}$ ou $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{\sqrt{(a + x)^2}}$ ou $\sqrt{\frac{aa - xx}{(a + x)^2}}$; &

comme le numérateur & le dénominateur peuvent être divisés chacun par $a+x$, j'aurois enfin $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

De la Formation des puissances des quantités monomes, de l'extraction de leurs racines, & du calcul des radicaux & des exposans.

122. Nous avons déjà dit qu'on appelle *puissance* d'une quantité, le produit de cette quantité multipliée par elle-même plusieurs fois de suite. a^3 est la troisième puissance ou le cube de a , parce que a^3 résulte de $a \times a \times a$. La quantité qu'on a multipliée est autant de fois facteur dans la puissance, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette même puissance : ainsi dans a^5 , a est cinq fois facteur ; dans $(a+b)^6$, $a+b$ est 6 fois facteur.

123. Puisque pour multiplier les quantités littérales monomes qui ont des exposans, il suffit (20) d'ajouter l'exposant de chaque lettre du multiplicande, avec l'exposant de la lettre semblable du multiplicateur, il s'ensuit donc que *pour élever à une puissance proposée, une quantité monome, il suffira de multiplier l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque à quelle puissance on veut élever cette quantité.* Nous appellerons ce nombre *l'exposant de la puissance*.

Ainsi pour élever $a^2 b^3 c$ à la 4^e puissance, j'écrirai

$a^2 b^3 c^4$, en multipliant les exposans 2, 3 & 1 de a, b, c , par l'exposant 4 de la puissance à laquelle on veut élever $a^2 b^3 c$. En effet, pour élever $a^2 b^3 c$ à la 4^{me} puissance, il faudroit multiplier $a^2 b^3 c$ par $a^2 b^3 c$, puis le produit par $a^2 b^3 c$, & ce second produit par $a^2 b^3 c$; or pour faire ces multiplications, il faut (20) ajouter les exposans; puis donc qu'ils sont les mêmes dans chaque facteur, il faut ajouter chaque exposant à lui-même 4 fois, c'est-à-dire, le multiplier par 4. Le raisonnement est le même à quelque autre puissance qu'on veuille élever un monome, & quels que soient les exposans actuels des lettres de ce monome.

Lorsqu'on a à faire sur les exposans des quantités, des raisonnemens ou des opérations qui ne dépendent point de certaines valeurs particulières de ces exposans, mais qui sont également applicables à toutes sortes d'exposans, on représente ces exposans par des lettres. Ainsi, pour en faire l'application à la règle que nous venons de donner; si l'on veut élever la quantité quelconque $a^m b^n c^p$ à une puissance quelconque désignée par r , on écrira $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

124. Si la quantité qu'on veut élever à une puissance proposée, étoit une fraction, on élèveroit à cette puissance, le numérateur & le dénominateur;

ainsi $\frac{a^3 b^3}{c d^2}$ élevé à la 5^{me} puissance, devient $\frac{a^{15} b^{15}}{c^5 d^{10}}$;
 pareillement $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ élevé à la puissance r devient $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

125. Si la quantité proposée avoit un coefficient, on l'élèveroit à la puissance proposée en le multipliant par lui-même, selon les règles de l'Arithmétique ; ainsi $4 a^3 b^2$ élevé à la cinquième puissance donneroit $1024 a^{15} b^{10}$. Quelquefois on se contente d'indiquer cette élévation, comme pour les lettres ; ainsi on peut écrire $4^5 a^{15} b^{10}$.

126. A l'égard des signes, si l'exposant de la puissance à laquelle il s'agit d'élever, est pair, le résultat aura toujours le signe + ; mais s'il est impair, il aura le signe + ou le signe —, selon que la quantité proposée aura elle-même le signe + ou le signe — ; c'est une suite immédiate de la règle donnée pour les signes (24).

127. Il suit de tout ce que nous venons de dire, que dans une puissance quelconque, l'exposant actuel de chaque lettre contient l'exposant de sa racine, autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance que l'on considère ; par exemple, dans la quatrième puissance, l'exposant de chaque lettre est quadruple de ce qu'il étoit dans la quantité primitive qui en est la racine.

128. Donc pour revenir d'une puissance quelconque à sa racine, c'est-à-dire, pour extraire une racine d'un degré proposé, d'une quantité monome quelconque, il faut diviser l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire. On appelle ce nombre l'exposant de la racine.

Ainsi pour tirer la racine troisième ou cubique de $a^{12}b^6c^3$, je diviserois chacun des exposans par 3, & j'aurois a^4b^2c . Pareillement pour tirer la racine cinquième de $a^{20}b^{15}c^5$, je diviserois chacun des exposans par 5, & j'aurois a^4b^3c . En général pour tirer la racine du degré r de la quantité $a^m b^n$, j'écrirois $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

129. Si la quantité proposée étoit une fraction, on tireroit séparément la racine du numérateur & celle du dénominateur.

130. S'il y avoit des coefficients, on en tireroit la racine quarrée ou cubique, par les méthodes données en Arithmétique; & par celle qu'on verra par la suite, lorsque cette racine est plus élevée.

131. Lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire, ne divise pas exactement chacun des exposans de la quantité proposée, c'est une preuve que

cette quantité n'est point une puissance parfaite du degré dont il s'agit. Alors l'exposant reste fractionnaire, & marque une racine qui reste à extraire. Ainsi, si l'on demande la racine cubique de $a^3 b^3 c^4$, on aura $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$ ou $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, dans laquelle l'exposant $\frac{1}{3}$ marque qu'il reste encore à extraire la racine cubique de c .

132. On indique aussi les extractions de racines supérieures au second degré, en employant le signe $\sqrt{}$; mais on place dans l'ouverture de ce signe, le nombre qui marque le degré de la racine dont il s'agit. Ainsi $\sqrt[3]{a}$, marque la racine cubique de a : $\sqrt[7]{a}$ marque la racine septième de a . Il faut donc regarder ces deux expressions $\sqrt[3]{a}$ & $a^{\frac{1}{3}}$ comme signifiant la même chose: il en est de même de $\sqrt[4]{a^4}$ & $a^{\frac{4}{4}}$.

133. Lorsque la quantité est complexe, il ne faut pas diviser chacun de ses exposans; mais il faut considérer la totalité de ses parties, comme ne faisant qu'une seule quantité dont l'exposant est naturellement 1, que l'on divise par l'exposant de la racine qu'il s'agit d'extraire, ce qui n'est, à proprement parler, qu'une indication de cette racine; par exemple, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)}$ qui est la même chose que $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^1}$, on écrit, $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$ ou $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Si

Si la quantité totale qui est sous le radical, avoit déjà un exposant, on diviseroit de même cet exposant, par celui de la racine qu'on a dessein d'extraire. Ainsi, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$, on peut écrire $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$.

134. Les règles que nous avons données (118 & suiv.) pour l'addition, la soustraction, la multiplication & la division des quantités radicales du second degré, s'appliquent également aux quantités radicales de degrés supérieurs, pourvu que les radicaux sur lesquels on a à opérer, soient de même degré entre eux. Ainsi $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a \sqrt[7]{a}$. $\sqrt[5]{a^2 b^3} \times \sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{a^5 b^5} = a b$. $a \times \sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{\frac{a^4 b}{a}} = \sqrt[4]{a^3 b}$.

135. S'il s'agit d'élever un radical quelconque à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du radical, il suffira d'ôter ce radical ainsi $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; ce qui est évident en général, si l'on fait attention que l'objet est alors de ramener la quantité à son premier état.

Pour élever une quantité radicale monome à une puissance quelconque, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, selon la règle donnée (123). Ainsi $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ élevé à la puissance quatrième, donne

$\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$ qui se réduit à $ab \sqrt[7]{ab^5}$; ce qu'on peut voir encore en cette autre manière : $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ étant la même chose (132) que $a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$, pour élever celui-ci à la quatrième puissance, je multiplie les exposans par 4, ce qui me donne $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab a^{\frac{1}{7}} b^{\frac{5}{7}} = ab \sqrt[7]{ab^5}$.

136. Pour diviser $\sqrt[7]{a^5}$ par $\sqrt[7]{a^3}$, on divisera a^5 par a^3 , & l'on donnera au quotient a^2 le signe $\sqrt[7]{}$, ce qui donnera $\sqrt[7]{a^2}$.

$$\begin{aligned} \text{De même } \frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} &= \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2} ; \\ \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} &= \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2} ; \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} ; \text{ car la} \end{aligned}$$

racine cinquième de 1 est 1. En général toute puissance ou toute racine de l'unité est l'unité.

137. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale, il faut multiplier l'exposant actuel du radical, par l'exposant de cette nouvelle racine ; ainsi, pour extraire la racine troisième de $\sqrt[5]{a^4}$, on écrira $\sqrt[15]{a^4}$, en multipliant 5 par 3. En effet $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; or (128) pour extraire la racine de

celui-ci, il faut diviser son exposant par 3, ce qui donne $a^{\frac{4}{3}}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{a^4}$.

138. Lorsque les quantités radicales proposées, ne sont pas toutes du même degré, il faut pour pratiquer sur elles les opérations de l'addition, soustraction, multiplication & division, les ramener au même degré; ce qui est facile par cette règle.

S'il n'y a que deux radicaux, multipliez l'exposant de l'un, par l'exposant de l'autre; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir les deux radicaux: élevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à la puissance marquée par l'exposant de l'autre radical.

Par exemple, pour réduire à un même radical, les deux quantités $\sqrt[5]{a^3}$ & $\sqrt[7]{a^4}$, je multiplie 5 par 7, & j'ai 35 pour l'exposant du nouveau radical qui sera $\sqrt[35]{}$; j'élève a^3 à la septième puissance, & a^4 à la cinquième, ce qui me donne a^{21} & a^{20} , en sorte que les quantités proposées sont changées en $\sqrt[35]{a^{21}}$ & $\sqrt[35]{a^{20}}$.

S'il y a plus de deux quantités radicales, multipliez entre eux les exposans de tous les radicaux; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir tous ces radicaux. Élevez, en même temps, la quantité qui est sous chaque radical, à une puissance d'un degré marqué

par le produit des exposans de tous les radicaux autres que celui dont il s'agit.

Par exemple, si j'avois les trois radicaux $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, & $\sqrt[8]{a^7}$; je multiplierois les trois exposans 5, 7 & 8, ce qui me donneroit 280 pour l'exposant commun des nouveaux radicaux; j'élèverois a^3 à la puissance 7×8 ou 56; a^2 , à la puissance 5×8 ou 40; & a^7 à la puissance 5×7 ou 35, ce qui me donneroit $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{20}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, en observant sur le premier exemple, que lorsqu'on élève, selon la règle, a^3 à la septième puissance, on rend a sept fois aussi souvent facteur qu'il l'étoit: mais en rendant l'exposant de son radical sept fois aussi grand qu'il l'étoit, on rend a sept fois moins souvent facteur; il y a donc compensation, & il n'y a que la forme de changée.

139. On peut conclure de ce raisonnement, que lorsque l'exposant de la quantité qui est sous le radical, & celui du radical même, ont un diviseur commun, on peut en simplifier l'expression, en divisant par ce diviseur commun, l'un & l'autre de ces deux exposans: par exemple, $\sqrt[12]{a^8}$, peut se réduire à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant 12 & 8 par 4. Pareillement $\sqrt[4]{a^2}$ peut se réduire à \sqrt{a} ; $\sqrt[6]{a^3}$ se réduit à \sqrt{a} .

140. Concluons encore que lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres nombres, on peut faire cette extraction successivement en cette manière : Supposons qu'on demande la racine sixième de a^{24} ; je puis tirer d'abord la racine quarrée, puis la racine cubique, & j'aurai la racine sixième. En effet $\sqrt[6]{a^{24}}$, se réduit (139) à $\sqrt[3]{a^{12}}$; puis à $\sqrt[4]{a^4}$ ou a^4 , ce qui est la même chose que si l'on avoit pris tout de suite la racine sixième de a^{24} en divisant l'exposant 24 par 6, (128).

Au reste, comme les exposans fractionnaires tiennent lieu des radicaux, & que les premiers sont plus commodes à employer dans le calcul, que les derniers, nous dirons encore un mot sur le calcul des exposans.

Si j'avois $\sqrt[3]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[4]{a^4}$, je changerois cette opération en celle-ci : $a^{\frac{3}{3}} \times a^{\frac{4}{4}}$, qui (20) donne $a^{\frac{7}{3}}$ ou $a a^{\frac{4}{3}}$ qui se réduit à $a \sqrt[3]{a^4}$. Si j'avois $\sqrt[3]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[7]{a^4}$, j'écrirois $a^{\frac{3}{3}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ou $a^{\frac{3}{3} + \frac{4}{7}}$, ou (en réduisant les deux fractions au même dénominateur), $a^{\frac{21 + 20}{35}}$, ou $a^{\frac{41}{35}}$ qui revient à $a a^{\frac{6}{35}}$, ou enfin à $a \sqrt[35]{a^6}$.

En général, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se change en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$ qui revient à $a^{\frac{n}{m} + \frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m} + \frac{s}{q}}$, ou (en réduisant au même dénominateur) $a^{\frac{qn + mr}{qm}} b^{\frac{ps + ms}{qm}}$, ou enfin

(132) à $\sqrt[m]{a^{qn} + m' b^{p'q} + m''}$. Il en est de même de la division ; $\frac{\sqrt[r]{a^4}}{\sqrt[r]{a^3}}$ se change en $\frac{a^{\frac{4}{r}}}{a^{\frac{3}{r}}} = a^{\frac{1}{r}}$ (31), ou enfin en $\sqrt[r]{a}$. Pareillement $\frac{\sqrt[r]{a^3 b^4}}{\sqrt[r]{a^2 b^2}}$ se change en $\frac{a^{\frac{3}{r}} b^{\frac{4}{r}}}{a^{\frac{2}{r}} b^{\frac{2}{r}}} = a^{\frac{3}{r} - \frac{2}{r}} b^{\frac{4}{r} - \frac{2}{r}}$ (31), ou (en réduisant les fractions au même dénominateur) $a^{\frac{21 - 10}{35}} b^{\frac{28 - 15}{35}}$ qui se réduit à $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$ qui est la même chose que $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$. En général $\frac{\sqrt[r]{a^n b^p}}{\sqrt[r]{a^{n'} b^{p'}}} = \frac{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}}{a^{\frac{n'}{r}} b^{\frac{p'}{r}}} = a^{\frac{n}{r} - \frac{n'}{r}} b^{\frac{p}{r} - \frac{p'}{r}} = a^{\frac{qn - m'}{qm}} b^{\frac{p'q - m''}{qm}} = \sqrt[m]{a^{qn - m'} b^{p'q - m''}}.$

141. Dans ce dernier exemple nous avons retranché l'exposant de chaque lettre du dénominateur, de l'exposant de la lettre correspondante dans le numérateur. La règle que nous avons donnée (31) pour la division, ne semble le permettre, que lorsque l'exposant du dénominateur est plus petit que celui du numérateur ; mais cela se peut en général, en donnant à l'excédent, le signe —, après la réduction faite ; en sorte qu'on peut en général mettre toute fraction Algébrique sous la forme d'un entier.

Par exemple, au lieu de $\frac{a^3}{b^2}$, on peut écrire $a^3 b^{-2}$. En effet, suivant l'idée que nous avons donnée de la division,

l'effet d'un diviseur est de détruire, dans le dividende, tous les facteurs qui se trouvent dans le diviseur; dans $\frac{a^3}{a^2}$, qui se réduit à a , le diviseur a^2 détruit dans a^3 deux facteurs égaux à a . Pareillement dans la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ l'effet de b^2 doit être de détruire dans a^3 deux facteurs égaux à b . Or quoique ces facteurs n'y soient pas explicitement, on peut toujours se les représenter : car on conçoit que a contient b , un certain nombre de fois soit entier soit fractionnaire : soit m ce nombre de fois; alors a vaut donc m fois b , ou mb ; la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ sera donc $\frac{m^3 b^3}{b^2}$ qui se réduit à $m^3 b$; or la quantité $a^3 b^{-2}$ devient en pareil cas $m^3 b^3 b^{-2}$ ou (20) $m^3 b^{3-2}$, c'est-à-dire, $m^3 b$; donc $\frac{a^3}{b^2}$ revient au même que $a^3 b^{-2}$.

Donc en général on peut faire passer une quantité du dénominateur au numérateur, en l'écrivant dans celui-ci, comme facteur, mais avec un exposant de signe contraire à celui qu'elle avoit dans le dénominateur.

Ainsi au lieu de $\frac{1}{a^3}$, on peut écrire $1 \times a^{-3}$ ou simplement a^{-3} ; au lieu de $\frac{1}{a^m}$, on peut écrire a^{-m} ; au lieu de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ on peut écrire $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Au lieu de $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ on peut écrire $(a^3 + b^3) \times (a^2 + b^2)^{-1}$; & en égard à tout ce qui précède, au lieu de $\frac{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}}$ on peut écrire $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{3}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$, & enfin $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{3}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

142. Et réciproquement *si une quantité est composée de parties qui aient des exposans négatifs , on pourra faire passer ces parties au dénominateur , en rendant leurs exposans positifs.* Ainsi , au lieu de $a^3 b^{-4}$, on pourra écrire $\frac{a^3}{b^4}$; au lieu de a^{m-3} qui est la même chose que $a^m \times a^{-3}$ on pourra écrire $\frac{a^m}{a^3}$ & ainsi de suite.

De la Formation des puissances des quantités complexes , & de l'extraction de leurs racines.

143. Suivant l'idée que nous avons donnée des puissances , il ne s'agit , lorsqu'on veut élever une quantité complexe à une puissance proposée , que de multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance : mais en se bornant à ce moyen , on tomberoit souvent dans des calculs très-longs pour parvenir à des résultats qu'on peut avoir à bien moins de frais , en réfléchissant un peu sur les propriétés des produits de quelques-unes de ces multiplications.

Nous allons nous occuper des puissances des quantités binomes , parce que celles-ci conduisent à la formation des puissances des quantités plus composées ; mais pour mieux faire sentir l'étendue de ce que nous avons à dire , nous reprendrons les

choies d'un peu plus haut ; nous examinerons quelle est la nature des produits que l'on trouve en multipliant successivement plusieurs facteurs binomes qui auroient tous un terme commun : cette recherche qui nous conduira directement à notre objet , nous fournira en même temps plusieurs propositions qui nous seront très-utiles par la suite.

144. Soient donc $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. plusieurs quantités monomes qui ont toutes le terme x commun , & qu'on veut multiplier les unes par les autres.

$$\begin{array}{l} \text{En multipliant } x + a \\ \text{par } \dots x + b \\ \hline \text{on aura } \dots x^2 + ax + ab \\ \qquad \qquad \qquad + bx \end{array}$$

Multipliant ce produit par $x + c$, on aura

$$\begin{array}{l} x^3 + ax^2 + abx + abc \\ + bx^2 + acx \\ + cx^2 + bcx \end{array}$$

Multipliant ce second produit par $x + d$, on aura

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd \\ + bx^3 + acx^2 + abdx \\ + cx^3 + adx^2 + acdx \\ + dx^3 + bcx^2 + bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{array}$$

Et ainsi de suite ; ce qui nous fournit les observations suivantes , en prenant pour un terme tout ce qui est dans une même colonne.

1°. Le premier terme de chaque produit est toujours le premier terme x de chaque binome , élevé à une puissance marquée par le nombre de ces binomes ; enforte que si le nombre des binomes étoit m , le premier terme de chaque produit feroit x^m .

2°. Les puissances de x vont ensuite en diminuant continuellement d'une unité jusqu'au dernier terme qui ne renferme plus d' x .

3°. Les multiplicateurs de chaque puissance de x , (que nous nommerons à l'avenir , multiplicateurs du terme où se trouvent ces puissances) sont , pour le second terme , la somme des seconds termes $a, b, c, \&c.$ des binomes ; pour le troisième terme , la somme des produits de ces quantités $a, b, c, \&c.$ multipliées deux à deux ; pour le quatrième , la somme des produits de ces quantités $a, b, c, \&c.$ multipliées trois à trois ; & ainsi de suite jusqu'au dernier qui est le produit de toutes ces quantités. Ces conséquences sont évidentes , quel que soit le nombre des quantités $x + a, x + b, \&c.$ qu'on a multipliées.

145. Si l'on suppose maintenant , que toutes les

quantités $a, b, c, \&c.$ soient égales, auquel cas tous les binomes qu'on a multipliés seront égaux, les produits trouvés ci-dessus, seront donc les puissances successives de l'un quelconque de ces binomes, de $x + a$, par exemple, si l'on suppose que les quantités $b, c, d, \&c.$ sont chacune égales à a . Si l'on met donc a dans ces produits, au lieu de chacune des lettres $b, c, d, \&c.$, on aura les résultats suivans pour les valeurs des puissances qui sont marquées à côté.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

Où l'on voit que si m est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome, les puissances successives de x seront $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, \&c.$

Mais on ne voit pas aussi évidemment comment les coefficients des différens termes de chaque puissance dérivent les uns des autres, ni quelle est leur dépendance de l'exposant m , dont cependant ils dépendent comme on va le voir.

146. Pour trouver la loi de ces coefficients, il faut retourner à nos premiers produits, & remarquer que puisque le multiplicateur du second terme est la somme de toutes les quantités $a, b, c, \&c.$, il faudra, lorsque toutes ces quantités seront égales

à a , qu'il soit composé de a , pris autant de fois qu'il y a de ces quantités; donc si leur nombre est m , ce multiplicateur sera m fois a , ou ma , c'est-à-dire, que son coefficient m sera égal à l'exposant du premier terme de cette puissance. C'est ce que l'on voit aussi dans les trois puissances particulières que nous avons exposées ci-dessus.

Voyons maintenant quels doivent être les multiplicateurs des autres termes. Il est évident que tous les produits ab , ac , ad , bc , bd , &c. deviennent chacun égal à a^2 , dans la supposition présente; pareillement tous les produits abc , abd , &c. deviennent chacun égal à a^3 & ainsi de suite. Donc le multiplicateur du troisième terme de chacun de nos premiers produits se réduit alors à a^2 pris autant de fois que les lettres a , b , c , &c. peuvent donner de produits deux à deux. Pareillement celui du quatrième se réduit à a^3 pris autant de fois que les lettres a , b , c , &c. peuvent donner de produits trois à trois & ainsi de suite; donc pour avoir le coefficient numérique, des troisième, quatrième, &c. termes de la puissance m du binome $x + a$, la question se réduit à déterminer combien un nombre m de lettres a , b , c , &c. peut donner de produits deux à deux, trois à trois, &c.

147. Or je remarque que si l'on a un nombre quelconque m de lettres, & qu'on les combine de toutes

les manières imaginables deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. sans répéter une même lettre dans une même combinaison, je remarque, dis-je,

1°. Que le nombre des combinaisons deux à deux, sera double du nombre des produits de deux lettres, réellement différens. En effet, deux lettres peuvent être combinées l'une avec l'autre de deux manières différentes; par exemple, a & b donnent ces deux combinaisons ab & ba ; mais ces deux combinaisons ne font pas deux produits différens.

2°. Le nombre des combinaisons de plusieurs lettres trois à trois, sera sextuple du nombre des produits de trois lettres, réellement distincts: en effet, pour avoir les combinaisons de trois quantités a, b, c , il faut, après en avoir combiné deux, a & b , par exemple, ce qui donne ab & ba , combiner la troisième c avec chacune des deux premières combinaisons, c'est-à-dire, lui donner toutes les dispositions possibles à l'égard des lettres a & b qui entrent dans ab & ba ; or cela donne 6 combinaisons de trois lettres, comme il est évident par les dispositions suivantes $abc, acb, cab, bac, bca, cba$; mais ces six combinaisons ne font chacune que le même produit.

Un raisonnement semblable prouvera que quatre quantités sont susceptibles de 24 combinaisons, dont

chacune cependant ne fait que le même produit; donc le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres quatre à quatre, est la 24^e partie du nombre total de ces combinaisons. Pareillement le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres 5 à 5, 6 à 6, 7 à 7, &c. est la 120^e , la 720^e , la 5040^e , &c. partie du nombre total de ces combinaisons; c'est-à-dire, est, en général, exprimé par une fraction qui a pour numérateur le nombre total des combinaisons, & pour dénominateur le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, &c., jusqu'à celui qui marque de combien de lettres chaque produit est composé.

148. Voyons donc quel est le nombre total des combinaisons que peut donner un nombre m de lettres a, b, c , &c., prises deux à deux, trois à trois, &c.

Il est évident pour les combinaisons deux à deux, que puisqu'une même lettre ne doit pas être combinée avec elle-même, elle ne peut l'être qu'avec les $m - 1$ autres, & par conséquent elle doit donner $m - 1$ combinaisons; donc puisqu'il y a m de lettres en tout, elles donneront m fois $(m - 1)$ ou $m \cdot (m - 1)$ combinaisons. Donc suivant ce qui vient d'être dit (147), le nombre des produits de deux lettres, réellement différens, sera $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

A l'égard des combinaisons trois à trois : pour les avoir , il faut que chacune des combinaisons deux à deux , soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme point , c'est - à - dire , avec un nombre de lettres marqué par $m - 2$; donc chacune de ces combinaisons donnera $m - 2$ combinaisons de trois lettres ; donc puisqu'il y a $m . (m - 1)$ combinaisons de deux lettres , dont chacune doit donner $m - 2$ combinaisons de trois lettres , il y aura en tout $m . (m - 1) . (m - 2)$ combinaisons de trois lettres ; donc puisque (124) le nombre des produits réellement distincts , est la sixième partie de ce nombre total de combinaisons , il sera $m . \frac{(m - 1) . (m - 2)}{6}$ ou $m . \frac{m - 1}{2} . \frac{m - 2}{3}$.

On prouvera de même , que le nombre des combinaisons quatre à quatre , sera $m . (m - 1) . (m - 2) . (m - 3)$; car il faudra combiner chaque combinaison de trois lettres , avec toutes les autres lettres que cette combinaison ne renferme point , & qui étant au nombre de $m - 3$ donneront , pour chaque combinaison de trois lettres , $m - 3$ combinaisons de quatre lettres ; donc le nombre des combinaisons trois à trois étant $m . (m - 1) . (m - 2)$, celui des combinaisons quatre à quatre sera $m . (m - 1) . (m - 2) . (m - 3)$; & puisque le nombre des produits quatre à quatre

réellement différens , est la vingt - quatrième partie de ce nombre de combinaisons , il sera donc

$$m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}.$$

Le même raisonnement prouvera que le nombre des produits distincts qu'on peut former en multipliant un nombre m de lettres 5 à 5 , 6 à 6 , &c.

sera exprimé par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$,

par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, &

ainsi de suite.

149. Concluons donc de-là , & de ce qui a été dit (146) , que les termes successifs du binome $x + a$ élevé à la puissance m ou de $(x + a)^m$ sont

$$x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \&c.$$

C'est-à-dire , que le premier terme de la suite ou série qui exprime cette puissance , est le premier terme x du binome , élevé à la puissance m ; qu'en suite les exposans de x vont en diminuant d'une unité , & ceux de a en augmentant d'une unité , à partir du second terme où il commence à entrer.

A l'égard des coefficients m , $m \cdot \frac{m-1}{2}$, &c. , il faut remarquer que celui du second est égal à l'exposant du premier : que celui du troisième qui est $m \cdot \frac{m-1}{2}$

est

est le coefficient m du précédent multiplié par $\frac{m-1}{2}$; c'est-à-dire , par la moitié de l'exposant de x dans ce même terme précédent. Pareillement , le coefficient du quatrième qui est $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$, n'est autre chose que le coefficient $m \cdot \frac{m-1}{2}$ du terme précédent , multiplié par $\frac{m-2}{3}$, c'est-à-dire , par le tiers de l'exposant de x dans ce même terme précédent & ainsi de suite. Toutes ces conséquences , que l'inspection seule fournit, nous conduisent à cette règle générale : *Le coefficient de l'un quelconque des termes , se trouve en multipliant le coefficient du précédent par l'exposant de x dans ce même terme précédent , & divisant par le nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.*

Formons d'après cette règle , la septième puissance de $x + a$, pour servir d'exemple. Nous aurons $(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. En écrivant d'abord x^7 ; puis multipliant celui-ci par 7 , diminuant l'exposant d'une unité & multipliant par a , ce qui donne $7ax^6$.

Je multiplie celui-ci par $\frac{6}{2}$, je diminue l'exposant de x d'une unité , & j'augmente celui de a d'une unité , & j'ai $21a^2x^5$ pour le troisième terme.

Je multiplie ce troisième par $\frac{5}{3}$, je diminue l'exposant de x d'une unité , & j'augmente celui de a d'une unité ,

Marine. Algèbre.

L

ce qui me donne $35a^3x^4$ pour le quatrième terme : il est aisé d'achever.

Si au lieu de $x + a$, on avoit $x - a$; alors les termes auroient alternativement les signes $+$ & $-$, à commencer du premier ; car si dans a^4 , par exemple, on substitue $-a$ au lieu de $+a$, le signe ne changera point (126) ; mais il changeroit si l'on substituoit $-a$ dans une puissance impaire de a .

La même formule que nous venons de donner peut servir à élever à une puissance proposée, non-seulement un binome simple comme $x + a$, mais encore un binome composé tel que $x^2 + a^2$ ou $x^2 + a$ ou $x^3 + a^3$, &c. ; & même à élever non-seulement à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, mais encore à une puissance dont l'exposant seroit positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Mais ces usages exigent, pour plus de commodité, que nous lui donnions une autre forme.

150. Reprenons donc la formule $(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + , \&c.$

Suivant ce que nous avons dit (142), on peut, au lieu de x^{m-1} , écrire $\frac{x^m}{x}$; au lieu de x^{m-2} , écrire $\frac{x^m}{x^2}$; au lieu de x^{m-3} , écrire $\frac{x^m}{x^3}$, & ainsi de suite. Conformément à ce principe, nous pourrions

donc changer notre formule en cette autre. $(x + a)^m$
 $= x^m + \frac{m a x^m}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^m}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot$
 $\frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^m}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^m}{x^4}, \&c.$

Si l'on fait attention maintenant que tous les termes ont pour facteur commun x^m , on pourra donner à la formule, cette autre forme : $(x + a)^m = x^m$
 $(1 + \frac{m a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3}$
 $+ \&c.,)$ dans laquelle x^m est censé multiplier tout ce qui est entre deux crochets. De-là nous concluons la règle suivante, pour former d'une manière commode la suite ou série des termes qui doivent composer la puissance m du binome $x + a$.

151. Écrivez sur une première ligne, comme il suit, les quantités.

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \&c.$$

$$1 + m \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} +$$

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{a^4}{x^4}, \&c.$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous & à une place plus avant sur la gauche, formez la suite inférieure, par cette loi.

Multipliez cette unité par le premier terme de la

suite supérieure & par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le second terme de la série inférieure.

Multipliez ce second terme, par le second terme de la suite supérieure & encore par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le troisième terme de la série inférieure.

Multipliez ce troisième terme, par le troisième de la suite supérieure & encore par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le quatrième terme de la série inférieure; & ainsi de suite.

Réunissez tous ces termes de la série inférieure, & multipliez la totalité par x^m , vous aurez la valeur de $(x + a)^m$.

152. Si au lieu de $x + a$, on avoit $x^2 + a^2$, ou $x^3 + a^3$ ou, &c.; au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^2}$ dans le premier cas, par $\frac{a^3}{x^3}$ dans le second, & en général par le second terme du binome divisé par le premier: & on multiplieroit la totalité, dans le premier cas, par x^2 élevé à la puissance m ; & dans le second cas, par x^3 , élevé à la puissance m ; c'est-à-dire, en général, par le premier terme du binome, élevé à la puissance proposée.

Enfin si le second terme du binome, au lieu d'avoir

le signe $+$, avoit le signe $-$, au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, lorsqu'on a $x + a$, ou par $\frac{a^2}{x^2}$, lorsqu'on a $x^2 + a^2$, on multiplieroit successivement par $-\frac{a}{x}$, ou par $-\frac{a^2}{x^2}$, &c ainsi de suite.

Supposons, pour donner un exemple, qu'on demande la sixième puissance de $x^3 + a^3$; je procède comme ci-dessous.

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

C'est-à-dire, qu'ayant écrit la suite $6, \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}$, qui répond à $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \frac{m-5}{6}$, &c., & ayant écrit, au-dessous, l'unité, pour premier terme de la seconde suite; je multiplie ce premier terme, par le premier terme 6 de la suite supérieure, & par $\frac{a^3}{x^3}$, ce qui me donne $\frac{6a^3}{x^3}$ pour le second terme. Je multiplie $\frac{6a^3}{x^3}$ par le second terme $\frac{2}{2}$ de la suite supérieure, & par $\frac{a^3}{x^3}$, & j'ai $\frac{15a^6}{x^6}$ pour troisième terme, & ainsi de suite. Enfin je multiplie la totalité des termes formés suivant cette loi, par x^3 élevé à la puissance 6, c'est-à-dire (123), par x^{18} , & j'ai $x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9} + \frac{15a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}$, qui se réduit à $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

153. Si au lieu d'un binome on avoit un trinome à élever

à une puissance proposée; si l'on avoit, par exemple, $a + b + c$ à élever à la troisième puissance, on feroit $b + c = m$, & l'on auroit $a + m$ à élever à la troisième puissance, qui selon les règles qu'on vient de donner, feroit $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Remettant maintenant, au lieu de m sa valeur $b + c$, on auroit $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Or les puissances $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ étant toutes des puissances de binome, se trouveront également par les règles précédentes; il ne s'agira plus que de les multiplier respectivement par $3a^2$, $3a$ & 1 . En achevant le calcul, on trouvera $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

154. Mais en réfléchissant un peu sur la règle de l'élevation des binomes, on verra qu'on peut former la puissance d'un polynôme quelconque, d'une manière plus commode en observant la règle suivante.

Supposons qu'on veut élever le trinome $a + b + c$ à la troisième puissance. Faites $b + c = p$, & alors il s'agit d'élever $a + p$ à la puissance 3, ce qui donnera. . . .

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3.$$

J'écris sous chaque terme de cette quantité, l'exposant de p ; je multiplie chaque terme par le nombre qui lui répond, & je change un p en b , ce qui donne.

$$3a^2b + 6abp_{\frac{1}{2}} + 3bp^2_{\frac{2}{2}}.$$

J'écris sous cette quantité la moitié de chaque exposant de p , & je multiplie chaque terme par le nombre correspondant, changeant encore un p en b , j'ai.

$$3ab^2 + 3b^2p_{\frac{1}{3}}.$$

J'écris sous chaque terme de celle-ci le tiers de l'exposant de p ; je multiplie comme ci-devant, & je change un p en b ; j'ai. b^3 .

Enfin je réunis toutes ces quatre lignes en changeant p en c , & j'ai $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 6abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3$, de même que ci-dessus.

Ainsi on multipliera chaque terme de la première ligne, par l'exposant de p ; chaque terme de la seconde, par la moitié de l'exposant de p dans cette seconde ; chaque terme de la troisième, par le tiers de l'exposant de p dans cette troisième, & ainsi de suite, observant à chaque ligne, à commencer de la seconde, de changer un p en b , & à la fin on changera tous les p restans, en c . Cette règle s'applique de même aux quadrinomes, quintinomes, &c.

De l'Extraction des Racines des quantités complexes.

155. Lorsqu'une fois on est en état de trouver tous les termes dont une puissance proposée d'un binome doit être composée, il est aisé d'en conclure la méthode d'extraire une racine d'un degré proposé, soit que la quantité dont il s'agit soit littérale, soit qu'elle soit numérique : ce que nous allons dire sur la racine cinquième suffira pour faire comprendre comment on doit se conduire dans les autres degrés.

Selon la formule des puissances d'un binome, la

cinquième puissance de $a + b$, est $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. De ces six termes les deux premiers suffisent pour établir la règle que nous cherchons.

Le premier est la cinquième puissance du premier terme du binome, & le second est le quintuple de la quatrième puissance de ce même premier terme, multipliée par le second terme; donc pour avoir le premier terme de la racine, il faut, après avoir ordonné tous les termes de la puissance donnée, extraire la racine cinquième, du premier terme de cette puissance; & pour avoir le second terme de la racine, il faut diviser le second terme de la quantité proposée, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine qu'on vient de trouver par la première opération. En effet, il est évident que la racine cinquième de a^5 est a , qui est le premier terme du binome, dont la quantité $a^5 + 5a^4b + \&c.$ est la cinquième puissance; & il est également évident que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ donne b qui est le second terme de ce binome. Mais comme il pourroit se faire que la quantité proposée ne fût pas une puissance parfaite du cinquième degré; après avoir ainsi trouvé le second terme de la racine, il faudra vérifier cette racine en l'élevant au cinquième degré & retranchant le résultat, de la quantité proposée; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de

$32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	Racine
$- 32a^5$	$2a + 3b$
Reste. $+ 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	$80a^4$

Je tire la racine cinquième de $32a^5$, elle est $2a$ que j'écris à la racine.

J'élève $2a$ à la cinquième puissance, & j'écris le produit $32a^5$ avec un signe contraire, sous le premier terme $32a^5$ de la quantité proposée, ce qui le détruit.

J'élève la racine $2a$ à la quatrième puissance, ce qui me donne $16a^4$ que je quintuple, & j'ai $80a^4$ que j'écris sous la racine $2a$; je m'en sers pour diviser le premier terme $240a^4b$ du reste; la division faite, j'ai pour quotient $3b$ que j'écris à la racine; en sorte que j'ai $2a + 3b$ pour la racine cherchée; mais pour m'en assurer davantage, j'élève $2a + 3b$ à la cinquième puissance; je retrouve les mêmes termes que dans la quantité proposée; faisant la soustraction, il ne reste rien; d'où je conclus que la racine est exactement $2a + 3b$.

S'il devoit y avoir encore un autre terme à la racine, alors il y auroit un reste, après cette première opération: je regarderois $2a + 3b$ comme une seule quantité, avec laquelle j'opérerois pour trouver le troisième terme, comme j'ai opéré avec $2a$ pour trouver le second.

156. A l'égard des quantités numériques, la règle est absolument la même; la seule chose qu'il faille éclaircir, est, à quel caractère on reconnoitra ce qui répond au premier terme a^5 & ce qui répond au terme $5a^4b$:

Pour se conduire dans cette recherche, il n'y a qu'à imaginer que dans le binome $a + b$, a marque les dizaines & b les unités; alors il est évident que a^5 fera des centaines de mille, parce que la cinquième puissance de 10 est 100000; donc le premier terme a^5 , ou la quantité dont il faudra tirer la racine 5^e , pour avoir le premier chiffre de la racine, ne peut faire partie des cinq derniers chiffres sur la droite; on séparera donc les cinq derniers chiffres, & supposé qu'il en reste cinq seulement ou moins de cinq sur la gauche, on en cherchera la racine 5^e , qui sera facile à trouver, ne pouvant avoir qu'un seul chiffre.

Quand on aura trouvé le premier chiffre de la racine & qu'on aura retranché sa cinquième puissance, de la quantité qui a servi à trouver cette racine, on abaissera, à côté du reste, les cinq chiffres séparés: & pour avoir la partie qu'il faut diviser par $5a^4$, c'est-à-dire, par le quintuple de la quatrième puissance des dizaines trouvées, il faudra séparer quatre chiffres sur la droite, & ne diviser que la partie restante à gauche: car $5a^4b$, qui est la partie qu'on doit diviser par $5a^4$, pour avoir b , ne peut faire partie des quatre derniers chiffres, puisqu'étant le produit de $5a^4$ par b , elle doit être au moins des dizaines de mille, puisque a^4 est des dizaines de mille.

Ces éclaircissemens posés, le procédé est le même que pour l'extraction littérale; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de

$$\begin{array}{r}
 3802.04032 \{ 52 \\
 \underline{3125} \\
 6770.4032 \\
 \underline{3125} \\
 380204032 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 0
 \end{array}$$

Je sépare les cinq derniers chiffres 04032, & je cherche la racine cinquième de 3802 qui ayant moins de 5 chiffres, ne peut donner qu'un chiffre pour cette racine; elle est 5 que j'écris à côté.

J'élève 5 à la cinquième puissance, & j'écris le produit sous 3802 pour l'en retrancher; il reste 677, à côté duquel j'abaisse les cinq chiffres séparés d'abord; du total, je sépare 4 chiffres sur la droite, & je divise la partie restante 6770, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine trouvée 5, c'est-à-dire, par 5 fois 625, ou 3125. Je trouve pour quotient 2, que j'écris à côté du premier chiffre trouvé 5. Pour vérifier cette racine 52, je l'élève à la cinquième puissance, & je trouve le nombre même proposé, d'où je conclus que 52 est exactement la racine.

S'il y avoit un reste, & qu'on voulût approcher plus près de la racine, on mettroit 5 zéros, & on continueroit pour avoir le troisième chiffre, qui seroit une décimale, comme on a fait pour avoir le second.

En général, pour tirer une racine de degré quelconque m , il faut séparer en allant de droite à gauche,

en tranches de m chiffres chacune, dont la plus à gauche peut en avoir moins. Tirer la racine du degré m de cette dernière tranche : cette racine n'aura jamais qu'un seul chiffre : à côté du reste, descendre la tranche suivante, en séparer $m - 1$ chiffres sur la droite, & diviser la partie restante à gauche, par m fois la racine trouvée, & élevée à la puissance $m - 1$; & ainsi de suite. Cela est fondé sur ce que les deux premiers termes d'un binôme $a + b$ élevé à la puissance quelconque m , sont $a^m + ma^{m-1}b$, & sur ce que si a marque des dizaines & b des unités, a^m ne peut faire partie des m derniers chiffres & $ma^{m-1}b$, ne peut faire partie de $m - 1$ derniers.

De la manière d'approcher de la racine des puissances imparfaites des quantités littérales.

157. Lorsque la quantité complexe proposée n'est point une puissance parfaite du degré dont on demande la racine, alors il n'y a point de racine exacte à espérer : il faut se borner à en approcher aussi près que peut l'exiger la question pour laquelle cette extraction est nécessaire. On pourroit y parvenir en suivant la méthode que nous venons d'exposer pour les puissances parfaites : elle donneroit

une suite de termes fractionnaires dont la valeur décroissant continuellement, permet de se borner à un nombre limité de termes & de négliger les autres : mais l'opération seroit longue & pénible. On peut parvenir au même résultat par une voie beaucoup plus courte, en employant la règle que nous avons donnée ci-dessus (151) pour élever un binome à une puissance proposée. Pour cet effet, il faut se rappeler (133) que toute racine peut être représentée par une puissance fractionnaire. Ainsi, demander la racine quarrée de $a+b$, ou d'évaluer $\sqrt{a+b}$, c'est demander d'élever $a+b$ à la puissance $\frac{1}{2}$, puisque (133) $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}$.

Donc, suivant la règle donnée (151), j'écris la suite.

$$\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-2}{3}, \frac{\frac{1}{2}-3}{4}, \frac{\frac{1}{2}-4}{5}, \&c.$$

Qui se réduit à . . . $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{5}{16}, -\frac{7}{16}, \&c.$

Et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme cette seconde

$$1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} + \frac{35}{1280} \frac{b^5}{a^5}, \&c.$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{2}$ de la première suite, & par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire par le second terme du binome $a+b$, divisé par le premier ; j'ai $\frac{1}{2} \frac{b}{a}$ pour le second terme.

Je forme de même le troisième, en multipliant ce second, par le second terme $-\frac{1}{4}$ de la première suite, &

par $\frac{b}{a}$, ce qui me donne $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ pour le troisième terme.

Pour le quatrième, je multiplie ce troisième, par le troisième terme $-\frac{1}{8}$ de la première suite & par $\frac{b}{a}$, & j'ai $+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$ pour quatrième terme, & ainsi de suite.

Enfin je multiplie la totalité de ces termes, par le premier terme du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, & j'ai pour la valeur de $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{a+b}$, la quantité suivante :

$a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4} + \frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}, \right.$
 &c.) qu'il est facile de prolonger autant qu'on le jugera à propos.

158. Nous verrons, par la suite, l'usage de ces sortes d'approximations; pour le présent, nous nous contenterons de faire voir par un exemple en nombres, comment on peut les employer pour approcher des racines des quantités numériques. Supposons qu'on veut avoir la racine quarrée de 101. Je partagerai 100 en deux parties, dont l'une soit un quarré, le plus grand qu'il sera possible; par exemple, je le partage en ces deux parties, 100 & 1; je prends la première pour a , & la seconde pour b , en sorte que je suppose $a = 100$ & $b = 1$; par conséquent $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; & $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0,01$; donc la série qui exprime $\sqrt{a+b}$, c'est-à-dire ici $\sqrt{101}$, deviendra, en mettant pour $a^{\frac{1}{2}}$ & $\frac{b}{a}$, leurs valeurs,

$$10\left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{(0,01)^3}{16} - \frac{5(0,01)^4}{128} + \frac{35(0,01)^5}{1280}, \&c.\right)$$

Supposons qu'on veuille avoir cette racine jusqu'à un dix millièmè près seulement; alors il suffira de prendre les trois premiers termes; car le quatrième qui est $\frac{(0,01)^3}{16}$ revient à $\frac{0,000001}{16}$, c'est-à-dire, à 0,000000625; & quoiqu'il doive être multiplié par 10 qui doit multiplier tous les termes de la série, il ne produira que 0,000000625 qui est bien au-dessous d'un dix millièmè. Les termes suivans sont, à plus forte raison, beaucoup au-dessous, puisqu'étant continuellement multipliés par 0,01 qui est une fraction, ils doivent diminuer continuellement; car en multipliant par une fraction, on ne prend (*Arith.* 120) qu'une partie du multiplicande.

La valeur de $\sqrt[10]{101}$ se réduit donc à.
 $10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} \right)$, c'est-à-dire, à
 $10 (1 + 0,005 - 0,0000125)$, ou $10 \times 1,0049875$;
ou 10,049875; c'est-à-dire, 10,0499 en se bornant aux dix millièmès.

Cette méthode peut s'appliquer à toutes sortes de racines & à toutes sortes de quantités; nous en donnerons encore un exemple sur $\sqrt[10]{(a^5 - x^5)}$. Je change donc cette quan-

tité en $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{10}}$, & procédant comme ci-dessus, j'écris
 $\frac{1}{10}, \frac{\frac{1}{10} - 1}{2}, \frac{\frac{1}{10} - 2}{3}, \frac{\frac{1}{10} - 3}{4}, \frac{\frac{1}{10} - 4}{5}, \&c.$
ou $\frac{1}{10}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{7}{100}, -\frac{19}{1250}, \&c.$

Et posant 1, pour premier terme de la seconde suite, je forme cette seconde,

$$1 - \frac{1}{10} \frac{x^5}{a^5} - \frac{2}{5} \frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{6}{125} \frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{42}{15625} \frac{x^{20}}{a^{20}} - \frac{798}{312500} \frac{x^{25}}{a^{25}}, \&c.$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier

terme $\frac{1}{3}$, de la suite supérieure, & par $-\frac{x^5}{a^5}$, c'est-à-dire par le second terme du binome, divisé par le premier; ce qui donne $-\frac{1}{3} \frac{x^5}{a^5}$ pour second terme de la série.

Pour avoir le troisième, je multiplie celui-ci par le second terme $-\frac{2}{3}$, de la suite supérieure, & par $-\frac{x^5}{a^5}$, ce qui me donne $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$.

En calculant de même les suivans jusqu'au sixième, & multipliant le tout par le premier terme a^1 du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire (96) par $a^1 \times \frac{1}{3}$ ou par a , j'ai pour valeur approchée de $\sqrt[3]{(a^1 - x^1)}$, la quantité $a(1 - \frac{x^5}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}}, \&c.)$

159. Observons à l'égard de ces séries & de toutes les autres qu'on peut former de la même manière, qu'on doit toujours prendre pour premier terme de la quantité proposée, le plus grand terme, par exemple, dans $\sqrt{(a + b)}$ nous avons pris ci-dessus a pour premier terme; mais si b étoit plus grand que a , il auroit fallu prendre b pour premier terme. La raison en est que lorsque b est plus grand que a , la première série $a^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2}, \&c.)$ est trompeuse; car $\frac{b}{a}$ étant alors plus grand que l'unité, les termes suivans qui sont continuellement multipliés par $\frac{b}{a}$ vont toujours en augmentant, en sorte qu'on n'a aucune raison de s'arrêter après un certain

certain nombre de termes. Mais si dans ce même cas on forme la série en prenant b pour premier terme, on aura $b^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{b^2}, \&c.)$ dans laquelle les termes vont en décroissant.

Les séries dont les termes vont en augmentant de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine, s'appellent *séries divergentes* ; & au contraire on appelle *séries convergentes* celles dont les termes diminuent de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine.

160. Nous avons vu (141) que toute fraction algébrique pouvoit être mise sous la forme d'un entier, en faisant passer son dénominateur au numérateur avec un exposant négatif. Cette observation nous fournit le moyen de réduire en série toute fraction dont le dénominateur seroit complexe, ce qui sera utile par la suite.

Par exemple, si j'avois $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$; au lieu de cette quantité, j'écrirois $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$, & alors j'élèverois $a^2 - x^2$ à la puissance -1 selon la règle donnée (128) ; c'est-à-dire, que je poserois d'abord la série $-1, -\frac{1-1}{2}, -\frac{1-2}{3}, -\frac{1-3}{4}, \&c.$ ou $-1, -1, -1, -1.$

Et je formerois la série suivante :

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \&c.$$

Marine. Algèbre.

M

en multipliant le premier terme 1 de cette seconde, par le premier terme -1 de la série supérieure & par $-\frac{x^2}{a^2}$, ce qui donneroit $+\frac{x^2}{a^2}$; multipliant celui-ci par le second terme -1 de la série supérieure, & par $-\frac{x^2}{a^2}$, & ainsi de suite. Après quoi je multiplierois la totalité, par le premier terme a^2 élevé à la puissance -1 , c'est-à-dire (96) par $a^{2 \times -1}$ ou a^{-2} , ce qui me donneroit.

$$a^{-2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \&c. \right)$$

pour valeur de $(a^2 - x^2)^{-1}$; donc pour avoir $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$, il ne s'agit plus que de multiplier par a^2 ; or $a^{-2} \times a^2$ donnant a^{2-2} , ou a^0 , qui se réduit à 1; on aura donc $a^2 (a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \&c.$

On s'y prendroit de même pour réduire en série $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^3}$; on considéreroit cette quantité comme $a^2 (a^2 + x^2)^{-3}$. Pareillement au lieu de $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$, on écriroit $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, & ensuite $a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$, & ainsi des autres.

161. Nous avons supposé (149) que la même formule qui servoit pour former les puissances parfaites d'un binome, pouvoit aussi servir pour en former les puissances imparfaites. Comme les principes sur lesquels cette formule est fondée, supposent que l'exposant est un nombre entier positif, on pourroit douter qu'on pût l'appliquer légitimement au cas où cet exposant est fractionnaire positif ou négatif, ou entier négatif. Voici comment on peut se convaincre que la même formule

peut servir dans tous ces cas. Soit en général $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ étant positif, on aura (151).

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \&c. \right)$$

Faisons, pour abréger, la somme de tous les termes de cette série, excepté le premier, égale à p ; c'est-à-dire, faisons

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3};$$

alors nous aurons $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} (1+p)$; élevons chaque membre à la puissance n , & (123) nous aurons

$$(a+b)^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^{\frac{m}{n} \cdot n} (1+p)^n, \text{ c'est-à-dire, } (a+b)^m = a^m (1+p)^n;$$

or nous savons que $(a+b)^m$, a pour valeur.

$$a^m \left(1 + m \frac{b}{a} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3}, \&c. \right)$$

Si donc $a^m (1+p)^n$ revient à cette quantité, ce sera une preuve, la dernière égalité ayant lieu, que toutes celles dont elle est déduite, ont lieu; & que par conséquent la valeur de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ doit être telle que la donne la première équation.

Voyons donc si $a^m (1+p)^n$ revient au même que $(a+b)^m$.
Or $(1+p)^n = 1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3 + \&c.$

Substituons, dans ce second membre, au lieu de p , sa valeur; mais pour ne pas embrasser trop de calcul à la fois, ne tenons compte dans cette substitution que des termes qui ne passeront pas le cube; nous aurons donc

$$p = \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$pp = \frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n^2} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$p^3 = \frac{m^3}{n^3} \frac{b^3}{a^3};$$

par conséquent $1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3$, &c.
 deviendra $1 + m \frac{b}{a} + m \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$
 $+ \frac{m^2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2}}{n} + \frac{2m^2 \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b^3}{a^3}}{n} + \&c.$
 $+ \frac{m^3 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3}}{n^2} + \&c.$

Or $m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} + \frac{m^2 \cdot \frac{n-1}{2}}{n}$, qui est la totalité de ce qui multiplie $\frac{b^2}{a^2}$, se réduit à $m \left(\frac{m-n}{2n} + \frac{mn-m}{2n} \right)$, ou $m \cdot \frac{mn-n}{2n}$, ou enfin à $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Pareillement, $m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} + \frac{2m^2 \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{n-1}{2}}{n} + \frac{m^3 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}}{n^2}$,
 qui est la totalité de ce qui multiplie $\frac{b^3}{a^3}$, se réduit à
 $m \cdot \left(\frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3} \right)$
 ou $m \cdot \left(\frac{(m-n) \cdot (m-2n) + 3m \cdot (m-n) \cdot (n-1) + m^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2n \times 3n} \right)$
 ou (en faisant les opérations indiquées, & les réductions), à
 $m \cdot \left(\frac{m^2 - 3m + 2}{2 \times 3} \right)$, qui est la même chose que $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$;
 donc la quantité $1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3$ &c.
 revient à $1 + \frac{mb}{a} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$

Et si au lieu de se borner aux termes qui ne passent pas le cube, on poursuivoit plus loin, on trouveroit de même que les termes suivans de cette série sont $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{b^4}{a^4}$,
 $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \frac{b^5}{a^5}$ &c.

Donc $a^m (1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3 + \&c.)$
 revient à $a^m (1 + \frac{m}{a} b + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.)$.

Donc l'équation $(a+b)^m = a^m (1+p)^n$ est vraie; donc
 aussi l'équation $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} (1+p)$, dont celle-là a été
 déduite, ou (ce qui revient au même), l'équation. . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} (1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1 \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2 \cdot \frac{b^3}{a^3} \&c.)$$

est vraie. Donc la formule qui sert à élever à une puissance
 dont l'exposant est un nombre entier positif, peut servir aussi
 à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre fraction-
 naire positif.

Pour faire voir que la même formule peut être employée,
 lorsque l'exposant est négatif, il faut remarquer que si nous
 représentons par T la totalité des termes que donneroit

$(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ en le développant suivant la même règle (151), on
 aura $(a+b)^{-\frac{m}{n}} = T$, c'est-à-dire, $\frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}} = T$ (142); & par

conséquent $1 = T \times (a+b)^{\frac{m}{n}}$, il faut donc prouver que si l'on

multiplie la somme T des termes que donnera $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$
 évalué selon la règle que nous avons donnée (151), si on la

multiplie, dis-je, par la valeur de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, le produit se

réduira à l'unité. Or $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ donneroit suivant cette règle

$$a^{-\frac{m}{n}} (1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + 1 \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + 1 \cdot \frac{m}{n} + 2 \frac{b^3}{a^3} \&c.)$$

Et $(a + b)^{\frac{m}{n}}$ donnera

$$a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} \&c. \right)$$

Multipliant ces deux quantités l'une par l'autre, & se bornant au cube de $\frac{b}{a}$, on aura

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} & \left(1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 2}{3} \frac{b^3}{a^3}, \&c. \right. \\ & + \frac{m}{n} \frac{b}{a} - \frac{\frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2}}{2} + \frac{\frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{m}{n} + 1}{2} \cdot \frac{b^3}{a^3} \dots \&c. \\ & + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{b^3}{a^3} \dots \&c. \\ & \left. + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} \&c. \right) \end{aligned}$$

Or si l'on se donne la peine d'en faire le calcul, on verra que la somme des quantités qui multiplient $\frac{b}{a}$, de celles qui multiplient $\frac{b^2}{a^2}$, de celles qui multiplient $\frac{b^3}{a^3}$, se réduit à zéro; & il en sera de même des puissances suivantes, si l'on pousse le calcul au-delà de $\frac{b^3}{a^3}$; donc ce produit se réduit à $a^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} \times 1$ ou $a^0 \times 1$ ou 1×1 , c'est-à-dire, 1. Donc la formule peut servir dans tous les cas.

Des Équations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

162. Une équation à une seule inconnue est dite du troisième, du quatrième, du cinquième, &c.

degré , lorsque la plus haute puissance de l'inconnue est la troisième , la quatrième , la cinquième , &c. ; mais outre cette puissance , une équation peut encore renfermer toutes les puissances inférieures ; ainsi $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, sont toutes des équations du troisième degré.

Une équation à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues est dite passer le premier degré , non-seulement lorsque l'une de ces inconnues passe le premier degré , mais encore lorsque quelques-unes de ces mêmes inconnues sont multipliées entre elles ; & en général , le degré s'estime par la plus forte somme que puissent faire les exposans dans un même terme : l'équation $x^3 + y^3 = a^2b$ est du troisième degré ; l'équation $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ est aussi du troisième degré , parce que les exposans de x & de y dans le terme x^2y font 3 ; dans les autres termes , les exposans sont moindres.

163. Pour résoudre les questions qui conduisent à des équations à plusieurs inconnues , & au-delà du premier degré , il faut , comme pour celles du premier degré , réduire ces équations à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue.

Si l'on a deux équations & deux inconnues , & que , dans l'une de ces équations , l'une des inconnues ne

passé pas le premier degré, prenez la valeur de cette inconnue, comme si tout le reste étoit connu; substituez cette valeur dans l'autre équation, & vous aurez une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue.

Par exemple, si l'on me proposoit cette question; trouver deux nombres dont la somme soit 12, & dont le produit soit 35. En représentant ces deux nombres par x & y , j'aurois $x + y = 12$, & $xy = 35$.

De la première je tire $x = 12 - y$; substituant dans la seconde équation, cette valeur de x , j'aurai $(12 - y)y = 35$ ou $12y - yy = 35$, équation du second degré qui étant résolue suivant les règles données (99 & suiv.), donnera $y = 6 \pm 1$, c'est-à-dire $y = 7$ ou $y = 5$; & puisque $x = 12 - y$, on aura $x = 5$ ou $x = 7$; c'est-à-dire, que les deux nombres cherchés sont 5 & 7 ou 7 & 5.

Pareillement, si j'avois les équations $x + 3y = 6$ & $x^2 + y^2 = 12$, de la première, je tirerois $x = 6 - 3y$; substituant dans la seconde, j'aurois $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; faisant l'opération indiquée, j'ai $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$; ou en passant tout d'un même côté, & réduisant $10y^2 - 36y + 24 = 0$; équation du second degré, qu'on peut résoudre par les règles données (99 & suiv.)

Prenons pour troisième exemple, les deux équations $xy + y^2 = 5$ & $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. La première donne $x = \frac{5-y^2}{y}$; substituant dans la seconde, on a $\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{5-y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$ ou $\frac{(5-y^2)^3}{y^3} + \frac{(5-y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$. Pour chasser les fractions, il suffit ici de multiplier le second terme par y & le second membre par y^3 , ce qui donne $(5-y^2)^3 + (5-y^2)^2 y^2 = y^5 + 7y^3$. Faisant les opérations indiquées, on a, $125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6 + 25y^2 - 10y^4 + y^6 = y^5 + 7y^3$; passant tout dans le premier membre & réduisant, on a, après avoir changé les signes, $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, équation qui ne renferme plus que y , mais qui est du cinquième degré.

164. A l'occasion de cet exemple, nous ferons remarquer que lorsque quelques-uns des dénominateurs de l'équation ont quelques facteurs communs entre eux, on peut faire disparaître ces dénominateurs plus simplement que par la règle générale, en examinant par quelle quantité il faudroit multiplier ces dénominateurs pour qu'ils devinssent égaux. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite (48) au sujet des fractions. Par exemple, si j'avois l'équation $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, je la changerois en $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, en multipliant les deux termes de

la première fraction par c , & les deux termes de la deuxième, par b ; alors chassant le dénominateur, j'aurois $c^2 x + b d x = a b c e$.

165. Si dans l'une des équations, l'une des deux inconnues ne passe pas le second degré : prenez dans celle-ci la valeur du quarré de l'inconnue la moins élevée, & substituez-la dans l'autre, à la place du quarré de cette même inconnue & de ses puissances; & continuez de substituer jusqu'à ce que cette inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré. Alors tirez de cette dernière équation la valeur de cette même inconnue, & substituez-la dans la première.

Par exemple, si j'avois $x^2 + 3y^2 = 6x$ & $2x^3 - 3y^2 = 8$, je prendrois, dans la première, la valeur de x^2 qui est $x^2 = 6x - 3y^2$; la substituant dans la seconde, j'aurois (en faisant attention que x^3 est $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, qui se réduit à $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; comme il y a encore x^2 dans celle-ci, j'y substitue de nouveau, la même valeur de x^2 que ci-dessus, & j'ai $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, équation dans laquelle x n'est plus qu'au premier degré.

J'en tire la valeur de x , & j'ai $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; je substitue cette valeur dans la première équation $x^2 + 3y^2 = 6x$: il me vient $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2$

$= 6 \left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2} \right)$ ou $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$
 ou (164) $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{(234y^2 + 48)(72 - 6y^2)}{(72 - 6y^2)^2}$,
 ou enfin, en chassant le dénominateur commun,
 $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$, équation dans laquelle il
 n'y a plus à faire que des multiplications & les
 réductions ordinaires.

166. Lorsque les équations sont de degrés plus élevés, on peut, en suivant une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer, arriver aussi à l'équation qui ne renferme plus qu'une inconnue; mais il est difficile d'éviter un inconvénient qui accompagne alors cette méthode: cet inconvénient est de faire monter l'équation à un degré plus élevé qu'elle ne doit être. Nous allons exposer une méthode qui n'est pas sujette à cette difficulté.

167. Toute équation à deux inconnues peut être toujours mise sous cette forme. $\dots Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + T = 0$; m marquant le degré auquel x est élevé. En effet, on peut toujours faire une totalité des différens termes composés de y & des quantités connues qui multiplient chaque puissance de x , & représenter cette totalité par une seule lettre; par exemple, dans l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, qui peut généralement représenter toutes les équations du second degré à deux inconnues [car il ne peut s'y trouver d'autres puissances de ces inconnues]; on peut rassembler les termes en cette manière $ax^2 + (d + by)x + cy^2 + ey + f = 0$, & pour abréger, l'écrire ainsi; $Ax^2 + Bx + C = 0$, sauf

à remettre, au lieu de A, B, C , ce que ces lettres représentent, après qu'on aura fait, de l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$, l'usage pour lequel on lui donne cette forme. Cela posé soient donc.

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots T = 0$$

$$\& A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \dots T' = 0$$

Les deux équations proposées, dont il s'agit de chasser ou éliminer x . Je les suppose d'abord du même degré; nous verrons ensuite ce qu'il faut faire quand elles sont de différents degrés.

On multipliera la première par A' , la seconde par A , & l'on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une équation du degré $m - 1$.

On multipliera la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, & l'on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une seconde équation du degré $m - 1$.

On multipliera la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une troisième équation du degré $m - 1$.

On continuera de même jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $m - 1$.

Cela posé, on aura m équations, chacune du degré $m - 1$. On considérera dans chacune, les différentes puissances $x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}$, &c. comme si elles étoient autant d'inconnues au premier degré. Par le moyen des $m - 1$ premières équations, ou en général par le moyen d'un

nombre $m - 1$ de ces équations, on déterminera (85) les valeurs de ces inconnues que l'on substituera dans la dernière. Cette opération donnera une équation sans x , dans laquelle mettant pour A, B , & C, A', B', C' , &c. les quantités que ces lettres représentent, & qui peuvent d'ailleurs renfermer telles puissances de y qu'on voudra, on aura l'équation en y .

Par exemple, si j'avois les deux équations

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= 0 \\ A'x^2 + B'x + C' &= 0 \end{aligned}$$

Qui peuvent représenter toutes les équations à deux inconnues, dans lesquelles l'une seulement des deux inconnues ne passe pas le second degré; en multipliant la première par A' , la seconde par A , retranchant le second produit du premier & réduisant, j'aurois $(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$.

Multipliant la première équation par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant le second produit du premier, & réduisant, j'aurois $(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0$.

Prenant donc, dans la première, la valeur de x qui est $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, & la substituant dans la deuxième, j'aurai $(A'C - AC') \times \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$.
Ou [à cause que $AC' - A'C$ est la même chose que $-(A'C - AC')$], j'aurai $\frac{-(A'C - AC')^2}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$, ou enfin $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$.

Si l'on avoit les deux équations.

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0.$$

Multipliant la première par A' , la seconde par A , retranchant & réduisant, on auroit $(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + (A'D - AD') = 0$.

Multipliant la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant & réduisant; on auroit $(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$.

Enfin multipliant la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, retranchant & réduisant, on auroit $(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + CD - CD' = 0$.

Il ne s'agit plus maintenant, en considérant x^2 & x comme des inconnues au premier degré, que de déterminer leurs valeurs à l'aide de deux quelconques de ces trois équations du second degré, & de substituer ces valeurs dans la troisième.

168. Si les deux équations proposées n'étoient pas au même degré pour x ; alors on opérera comme il suit.

Soient m & n les deux exposans, & m le plus grand. On multipliera l'équation du degré n , par x^{m-n} , ce qui les mettra toutes deux au même degré. Alors on opérera comme dans le cas précédent, en continuant les multiplications jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $n - 1$, ce qui donnera n équations, chacune du degré $m - 1$.

On substituera dans chacune & dans toutes les puissances supérieures à x^n , la valeur de x^n tirée de l'équation du degré n , & on continuera de substituer, jusqu'à ce que la plus haute puissance restante soit x^{n-1} , ce qui sera toujours possible ; alors on aura n équations chacune du degré $n - 1$. En employant $n - 1$ de ces équations, on déterminera les valeurs de x^{n-1} , x^{n-2} , x^{n-3} , &c. considérées comme autant d'inconnues au premier degré, & on les substituera dans la dernière.

Cette méthode est générale. Elle peut être simplifiée dans beaucoup de cas que nous ne nous arrêterons pas à détailler. Nous nous contenterons de remarquer que dans les multiplications successives par A' & A , $A'x + B'$ & $Ax + B$, &c. on peut se dispenser de multiplier le premier, les deux premiers, &c. termes des deux équations proposées, & en général autant de premiers termes qu'il entre de termes dans le multiplicateur, parce que le produit qu'ils donneront, s'anéantira par la soustraction.

169. Si l'on détermine les valeurs des différentes puissances de x d'après la règle que nous avons donnée pour les équations du premier degré à plusieurs inconnues, l'équation finale en y ne montera jamais à un degré plus haut que $m.n$, en supposant que le plus haut exposant de x , ainsi que celui de y , soit m dans l'une des équations & n dans l'autre. Mais si les exposants de x & de y sont inégaux dans chaque équation, en sorte que ceux de x dans la première & dans la seconde étant toujours m & n , ceux de y soient $m + p$ & $n + q$, l'équation finale en y ne passera jamais le degré $m.n + m.q + n.p$. Voyez pour la démonstration les *Mém. de l'Acad. des Sciences*, année

1764. Voyez aussi les *Mém. de l'Acad. de Berlin*, année 1748, & l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Des équations à plus de deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

170. Lorsqu'on a plus de deux équations & plus de deux inconnues, trois, par exemple, on peut s'y prendre de la même manière, en éliminant d'abord une des inconnues par le moyen de la première & de la seconde équation, traitées selon la méthode précédente; & en éliminant encore la même inconnue par le moyen de la première & de la troisième ou de la seconde & de la troisième. On aura par ce moyen deux équations qui ne renfermeront plus que deux inconnues que l'on traitera encore selon la méthode précédente.

Mais nous ne devons pas dissimuler que cette méthode qui conduit sûrement, lorsqu'on n'a que deux équations & deux inconnues, tombe néanmoins dans l'inconvénient de conduire à des équations plus élevées qu'il ne faut, lorsque le nombre des équations proposées est plus grand que 2.

Le moyen d'éviter cet inconvénient, est d'éliminer en combinant les équations, non pas deux à deux, mais trois à trois, lorsqu'il y en a trois; quatre à quatre, lorsqu'il y en a quatre, &c. Mais cette manière de les combiner exige encore un choix particulier, dont le détail nous mènerait trop loin. On le trouvera dans les *Mém. de l'Acad. des Sciences pour l'année 1764*. On y trouvera aussi plusieurs recherches sur le degré où doit monter l'équation finale résultante de l'élimination de plusieurs inconnues. Au reste, quoique ces méthodes auxquelles nous renvoyons, abaissent considérablement le degré auquel conduiroient celles qu'on a eues jusqu'ici, & autant qu'il est possible

possible en n'éliminant qu'une inconnue à la fois, il y a lieu de croire cependant, qu'il peut être encore diminué; mais probablement on n'y parviendra que quand on aura trouvé une méthode pour éliminer à la fois toutes les inconnues hors une, ce que je ne sache pas qu'on puisse encore pratiquer généralement sur d'autres équations que sur celles du premier degré.

Des Équations à deux termes.

171. On appelle *Équations à deux termes*, celles dans lesquelles il n'entre qu'une seule puissance de l'inconnue, parce qu'elles peuvent toujours être réduites à deux termes. Par exemple, l'équation $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ est une équation à deux termes, parce qu'en la mettant sous cette forme $(a + b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, on voit que a & b étant des quantités connues, on pourra toujours réduire $a + b$ à une seule quantité, & $a^4b^2 - a^3b^3$ pareillement à une seule quantité, enforte que cette équation peut être représentée par cette autre $px^5 = q$. Ces équations sont très-faciles à résoudre; car il est évident qu'après avoir dégagé la puissance de l'inconnue, par les mêmes règles que dans les autres équations, il ne reste plus qu'à tirer la racine du degré marqué par l'exposant de l'inconnue. Par exemple, l'équation $px^5 = q$, deviendrait $x^5 = \frac{q}{p}$, & tirant la racine cinquième $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

172. Lorsque l'exposant est impair, il n'y a jamais qu'une seule valeur réelle. Par exemple, si l'on avoit cette équation $x^5 = 1024$, on auroit $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; Or il est évident qu'il n'y a qu'un seul nombre réel qui, élevé à la cinquième puissance, puisse produire 1024.

Si le second membre de l'équation avoit le signe —, la valeur de x auroit le signe —; parce que — combiné par multiplication, avec —, un nombre impair de fois, donne —; mais lorsque l'exposant est pair, l'inconnue a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, & qui peuvent être ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Ce dernier cas aura lieu si le second membre a le signe —. Si l'on avoit l'équation $x^4 = 625$, on en concluroit $x = \sqrt[4]{625} = 5$; mais puisque — multiplié par —, un nombre pair de fois, donne la même chose que + multiplié par +, — 5 peut satisfaire aussi bien que + 5; ainsi il faut écrire $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$ comme dans les équations du second degré. Si, au contraire, on avoit eu $x^4 = -625$; on auroit conclu $x = \pm \sqrt[4]{-625}$; mais ces deux valeurs sont imaginaires, parce qu'il n'y a aucun nombre positif ou négatif qui multiplié par lui-même un nombre pair de fois, puisse produire une quantité

négative. Appliquons ces équations à une question. Supposons qu'on demande de *trouver deux moyennes proportionnelles entre 5 & 625*. En nommant x & y ces inconnues, on aura $\div\div 5 : x : y : 625$, qui donne ces deux proportions $5 : x :: x : y$

$$\& x : y :: y : 625.$$

D'où l'on déduit ces deux équations, en multipliant les extrêmes & les moyens, $5y = x^2$, & $625x = y^2$.

La première donne $y = \frac{x^2}{5}$; substituant dans la seconde, on a $625x = \frac{x^4}{25}$; divisant par x & multipliant par 25, on a $x^3 = 15625$, & enfin $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; donc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

Des Équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

173. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances différentes de x , mais dont l'une ait un exposant double de celui de l'autre. Par exemple, $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, sont dans ce cas. Ces équations se résolvent comme celles du second degré : après avoir rendu la plus haute puissance positive, si elle ne l'est pas, & après avoir dégagé cette même puissance, des quantités qui la multiplient ou la divisent, on prend la moitié de ce qui multiplie la puissance inférieure de l'inconnue, & on ajoute à chaque membre le carré de cette

moitié, ce qui rend le premier membre un carré parfait. Alors on tire la racine carrée de chaque membre, en donnant à celle du second, le double signe \pm . L'équation est réduite à une équation à deux termes.

Par exemple, si l'on demandoit de *trouver deux nombres dont la somme des cubes fût 35, & dont le produit fût 6* : on auroit ces deux équations $x^3 + y^3 = 35$ & $xy = 6$. Cette dernière donneroit $y = \frac{6}{x}$, valeur qui substituée dans la première, donne $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; chassant le dénominateur, & transposant, on a $x^6 - 35x^3 = -216$. Je prends donc la moitié de 35 qui est $\frac{35}{2}$; j'en ajoute le carré à chaque membre, & j'ai $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; tirant la racine carrée, $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$; transposant, $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$ & enfin tirant la racine cubique, $x = \sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}}$; or $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$; & $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225 - 864}{4} = \frac{361}{4}$; donc $\sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216} = \sqrt{(\frac{361}{4})} = \frac{19}{2}$. Donc $x = \sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}}$ qui donne ces deux valeurs $x = \sqrt[3]{\frac{35+19}{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, & $x = \sqrt[3]{\frac{35-19}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; & puisqu'on a trouvé $y = \frac{6}{x}$, on aura $y = 2$ & $y = 3$.

Lorsque le plus haut exposant est 4 ou un multiple de 4, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles.

De la Composition des Équations.

174. Nous venons de voir que les Équations à deux termes ne donnoient, pour l'inconnue, qu'une seule valeur réelle lorsqu'elles sont de degré impair, & deux lorsqu'elles sont de degré pair : elles en donnent, outre cela, plusieurs autres qui sont imaginaires, mais qui ne sont pas moins utiles, ainsi que nous le verrons lors de la résolution des équations, & ailleurs. En général une équation quelconque donne toujours autant de valeurs pour l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette équation. De ces valeurs, qu'on nomme aussi racines de l'équation, les unes peuvent être positives, les autres négatives; les unes réelles, les autres imaginaires.

175. Pour rendre toutes ces vérités sensibles, il faut observer que lorsque dans une équation on a fait passer tous les termes dans un seul membre, & que l'on a ordonné toutes les puissances de x ou de l'inconnue, on peut toujours considérer ce membre comme le résultat de la multiplication de plusieurs facteurs binomes simples qui auroient tous pour terme commun x .

Par exemple, lorsque l'équation $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$ a été mise sous la forme suivante, par la transposition de ses termes $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, on conçoit que $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, peut très-bien résulter de la multiplication de trois facteurs binomes simples $x - a$, $x - b$, $x - c$.

En effet, si l'on multiplie ces trois facteurs, on aura...

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abc &= 0 \\ -bx^2 + acx & \\ -cx^2 + bcx & \end{aligned}$$

Or pour que ces deux équations soient les mêmes, il ne s'agit que de trouver pour a , b , c , des valeurs telles que $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$, & $abc = 9$.

Pour trouver chacune de ces quantités, a , par exemple, il faut, après avoir multiplié la première équation par a^2 , & la seconde par a , ce qui donnera $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, & $abc = 9$, il faut, dis-je, retrancher la seconde de la première, & y ajouter la troisième; ce qui donne $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, ou, en transposant $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

On trouvera de la même manière, que l'équation qui donneroit b , est $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, & que celle qui donneroit c , est $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Ce qui nous fournit les propositions suivantes.

176. 1°. Puisque l'équation qui doit donner a , est la même que celle qui doit donner b , & la même que celle qui doit donner c ; & que d'ailleurs il est facile de voir que les valeurs de a , b , c ne peuvent être égales, il faut donc, que l'une quelconque de ces trois équations, puisse donner les valeurs de a , de b & de c ; donc chacune de ces équations doit avoir trois racines, dont l'une sera la valeur de a ; la seconde, la valeur de b ; & la troisième, la valeur de c .

2°. Chacune de ces équations est la même que l'équation même proposée $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, à la seule différence près, que a , ou b , ou c , est changé en x .

Donc celle-ci doit avoir trois racines, & ces trois racines doivent être les trois valeurs de a , b , c .

Donc les quantités qu'il faut mettre pour a , b , c dans $x - a$, $x - b$, $x - c$, pour produire l'équation $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, par la multiplication de ces facteurs simples, sont les racines mêmes de cette équation.

177. Si les coefficients des différentes puissances de x , au lieu d'être 8, 7, &c. étoient d'autres nombres; & si l'équation, au lieu d'être du troisième degré, étoit du quatrième, du cinquième, &c., les conséquences que nous venons de tirer, seroient encore de même nature. Ainsi, si l'on avoit en général $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, p , q , r , s étant des nombres connus; on pourroit, de même, considérer cette équation, comme formée du produit de quatre facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. En effet ces quatre facteurs étant multipliés, donneroient.

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0. \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^3 + adx^2 - acdx & \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

Or pour que cette quantité soit la même que $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, il faut que a , b , c , d soient tels que l'on ait $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$.

Si l'on multiplie la première de ces équations par a^3 , la seconde par a^2 , la troisième par a , & qu'on retranche la seconde & la quatrième, de la première & de la troisième

réunies, on aura $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, ou $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$, on trouveroit de même que l'équation en b , est $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; que l'équation en c est $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$; & que l'équation en d est $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. Ainsi l'équation qui donnera a , doit donc aussi donner b , c & d ; elle doit donc avoir quatre racines qui seront les valeurs des quatre quantités a , b , c , d . Et comme chacune de ces équations est la même que l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, les quantités a , b , c , d qu'il faut prendre pour produire cette dernière par la multiplication de quatre facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, sont donc les racines mêmes de cette équation.

178. Donc en général, 1°. une équation de degré quelconque peut toujours être considérée comme formée du produit d'autant de facteurs binomes simples, qui ont tous pour terme commun la lettre qui représente l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue. 2°. Les seconds termes de ces binomes, sont les racines de cette équation, chacune étant prise avec un signe contraire.

179. Si l'équation, au lieu d'avoir ses termes alternativement positifs & négatifs comme nous l'avons supposé ci-dessus, dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, avoit toute autre succession de signes, par exemple, si elle étoit $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, on n'en démontreroit pas moins, & de la même manière, qu'elle peut toujours être représentée par $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$; a , b , c , d étant les racines de cette dernière équation.

180. Puisque a , b , c , d , &c. sont les racines de l'équation,

il suit des équations $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, 1°. que dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; & en général dans toute équation, le coefficient $-p$ du second terme, pris avec un signe contraire, c'est-à-dire, $+p$, est égal à la somme de toutes les racines.

2°. Que le coefficient q du troisième terme est égal à la somme des produits de ces racines multipliées deux à deux.

3°. Que celui du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines multipliées trois à trois, & ainsi de suite, & qu'enfin le dernier terme, est le produit de toutes les racines.

Cela est général, quels que soient les différens signes des termes de l'équation, prenant toujours avec un signe contraire, le coefficient de chaque terme de numéro pair.

181. D'où il suit, que dans une équation qui n'a pas de second terme, il y a sûrement des racines positives & des racines négatives, & la somme des unes est égale à la somme des autres.

Ainsi dans l'équation $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, la somme des trois racines est -2 ; la somme de leurs produits, multipliés deux à deux, est -23 ; la somme de leurs produits trois à trois, ou le produit des trois racines est $+60$. En effet les trois racines sont $+5$, -4 , -3 , ainsi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres, au lieu de x , dans l'équation; car chacun réduit le premier membre à zéro. Or il est évident que la somme de ces trois nombres, c'est-à-dire, $+5 - 4 - 3$ est -2 ; que la somme de leurs produits deux à deux, ou $-20 - 15$

$+ 12$, est $- 23$; & que le produit des trois, est $5 \times - 4 \times - 3$, c'est-à-dire, $+ 60$.

Parcillemeut dans l'équation $x^3 - 19x + 30 = 0$, comme le second terme manque, je conclus qu'il y a des racines positives & des racines négatives, & que la somme des unes est égale à la somme des autres; en effet les trois racines sont $+ 2$, $+ 3$, & $- 5$.

En considérant une équation, comme formée du produit de plusieurs facteurs binomes simples, on se rend aisément raison, comment il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres différens qui satisfassent à une équation. Par exemple, si l'on proposoit cette question: *Trouver un nombre tel que si on en retranche 5, & qu'à ce même nombre on ajoute successivement les nombres 4 & 3, les deux sommes multipliées entre elles, & par le reste, fassent zéro*: on aura, en nommant x ce nombre, $x - 5$ pour le reste, & $x + 4$, $x + 3$ pour les deux sommes; il faut donc que $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = 0$, c'est-à-dire, que $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$; or on voit évidemment que ce produit ou son égal $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$ peut devenir zéro dans trois cas différens; savoir, si $x = - 4$, si $x = - 3$, & si $x = 5$: en effet, dans le premier cas, il devient $0 \times (- 4 + 3) \times (- 4 - 5)$ ou 0 ; dans le second, il devient $(- 3 + 4) \times (0) \times (- 3 - 5)$ ou 0 ; & dans le troisième, $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (0)$ ou 0 . Or quand on propose une équation telle que $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, rien ne détermine à prendre $- 4$ plutôt que $- 3$, ou plutôt que $+ 5$, puisque chacun réduisant également le premier membre, à zéro, satisfait également à l'équation.

182. Nous placerons encore ici une autre remarque qui peut avoir son utilité. Les équations $a + b + c + d = p$,

$ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, nous ont, toutes, conduit à la même équation, soit pour avoir a , soit pour avoir b , soit, &c. La raison en est que a , b , c , d , étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui détermineroient l'autre; donc en général, si dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune, les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations, & les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation; & par conséquent cette question conduira à une équation composée.

183. Puisqu'on peut considérer une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on peut aussi la considérer comme formée du produit de plusieurs facteurs composés; ainsi une équation du troisième degré peut être considérée comme formée du produit d'un facteur du second degré, tel que $x^2 + ax + b$, par un facteur du premier, tel que $x + c$: en effet, $x^2 + ax + b$ peut toujours représenter le produit des deux autres facteurs simples.

De même, une équation du cinquième degré peut être considérée comme formée, ou du produit de cinq facteurs simples, ou de deux facteurs du second degré & d'un facteur du premier, ou d'un facteur du troisième & d'un facteur du second, ou enfin d'un facteur du quatrième & d'un facteur du premier.

184. Nous avons vu qu'une équation du second degré pouvoit avoir des racines imaginaires; puis donc qu'une équation de degré quelconque peut avoir été formée par le

concours d'un ou de plusieurs facteurs du second degré, elle peut aussi avoir des racines imaginaires. Mais il peut y en avoir de formes bien différentes de celles du second degré.

185. Quand on considère une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on voit qu'elle ne peut avoir que m diviseurs du premier degré, m marquant le degré.

186. En considérant une équation comme formée du produit de facteurs du second degré, le nombre des diviseurs du second degré qu'elle peut avoir, est exprimé par $m \cdot \frac{m-1}{2}$, m marquant le degré de cette équation. En effet chaque facteur du second degré étant le produit de deux facteurs simples, dont chacun peut diviser l'équation, doit aussi pouvoir diviser l'équation. Or nous avons vu (148) qu'il y a $m \cdot \frac{m-1}{2}$ manières différentes de multiplier, deux à deux, un nombre m de quantités, il y aura donc $m \cdot \frac{m-1}{2}$ différens diviseurs du second degré.

Par exemple, l'équation

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^3 + adx^2 - acdx & \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

formée du produit de $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$, peut être considérée comme formée du produit de deux facteurs du second degré, en ces six manières

en multipliant $(x - a) \times (x - b)$ par $(x - c) \times (x - d)$
 $(x - a) \times (x - c) \dots (x - b) \times (x - d)$
 $(x - a) \times (x - d) \dots (x - b) \times (x - c)$
 $(x - b) \times (x - c) \dots (x - a) \times (x - d)$
 $(x - b) \times (x - d) \dots (x - a) \times (x - c)$
 $(x - c) \times (x - d) \dots (x - a) \times (x - b)$

Ainsi une équation du quatrième degré peut avoir six différens diviseurs du second, & en général une équation du degré m , peut avoir $m \cdot \frac{m-1}{2}$ différens diviseurs du second degré.

Concluons donc de-là, que si l'on demande quelles devroient être les valeurs de g & de h , pour que $x^2 + gx + h$ fût diviseur d'une équation proposée du degré m , on peut être assuré que g & h ne peuvent être déterminés chacun que par une équation du degré $m \cdot \frac{m-1}{2}$. Car $x^2 + gx + h$ est aussi propre à représenter l'un des diviseurs du second degré que tout autre; donc h doit être susceptible de $m \cdot \frac{m-1}{2}$ valeurs; il en est de même de g qui est la somme de deux des racines de l'équation. Chacune de ces quantités doit donc être donnée par une équation du degré $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

On prouvera de même qu'en considérant une équation comme formée du produit de facteurs du troisième degré, chaque facteur du troisième degré est susceptible de $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ valeurs différentes; en sorte que si $x^3 + gx^2 + hx + k$ représente l'un de ces facteurs, k ne pourra être déterminé que par une équation du degré $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$. On voit

assez les conséquences analogues qu'il y a à tirer pour les facteurs du quatrième, cinquième, &c. degré.

187. Concluons de tout ce qui précède que lorsqu'on a trouvé une racine d'une équation, on peut, pour avoir les autres, diviser l'équation par $x -$ cette racine, c'est-à-dire, par $x - a$ en représentant cette racine par a ; la division se fera exactement, & donnera pour quotient une quantité où x sera moins élevé d'un degré; cette quantité étant égale à zéro sera l'équation qu'il faut résoudre pour avoir les autres racines. On voit de même que si l'on connoît deux racines, que je représente par a & b , il n'y a qu'à diviser l'équation par $(x - a) \times (x - b)$ & ainsi de suite.

Des Transformations qu'on peut faire subir aux Équations.

188. On peut faire subir aux équations différentes transformations dont il est à propos que nous parlions avant de passer à la résolution de ces mêmes équations.

189. Si l'on change dans une équation les signes des termes qui renferment des puissances impaires, les racines positives de cette équation seront changées en négatives & les négatives en positives : en effet, pour changer les signes des racines de l'équation, il suffit de mettre $-x$ au lieu de $+x$; or cette substitution ne change point les signes des termes qui renferment des puissances paires de x , & change au contraire, les signes de ceux qui renferment des puissances impaires.

190. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, & cela sans donner un coefficient au premier terme, il faut substituer au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs; & multiplier ensuite

toute l'équation par le dénominateur qu'aura alors le premier terme.

Par exemple, si j'ai $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$, je ferai $x = \frac{y}{mnp}$; & substituant dans l'équation, j'aurai $\frac{y^3}{m^3 n^3 p^3} + \frac{ay^2}{m^3 n^2 p^2} + \frac{cy}{m n^2 p} + \frac{d}{p} = 0$; multipliant par $m^3 n^3 p^3$, j'ai $y^3 + \frac{am^3 n^3 p^3 y^2}{m^3 n^2 p^2} + \frac{m^3 n^3 p^3 c}{m n^2 p} y + \frac{m^3 n^3 p^3 d}{p} = 0$; & faisant les divisions indiquées, $y^3 + anpy^2 + m^2 np^2 cy + m^3 n^3 p^2 d = 0$.

191. Si m , n & p étoient égaux, il suffiroit de faire $x = \frac{y}{m}$. D'où il suit que pour changer une équation dont tous les coefficients sont des nombres entiers, mais dont le premier terme a un coefficient, en une autre dans laquelle celui-ci n'en ait plus, & où les autres aient néanmoins des entiers pour coefficients, il faut faire $x = \frac{y}{m}$, m marquant ce coefficient du premier terme. En effet, si j'ai l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$; en divisant par m , j'aurai $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, où tous les dénominateurs sont égaux.

192. Pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, & divisé par l'exposant du premier.

En effet, représentons, en général, cette équation par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + k = 0$. Si on suppose

$x = y + s$, on aura deux équations & trois inconnues ; on sera donc maître de déterminer l'une d'entre elles , par telle condition que l'on voudra.

Or si l'on substitue , dans chaque terme , au lieu de la puissance de x qu'il renferme , une puissance semblable de $y + s$, on aura (149) une suite de termes telle que celle-ci.....

$$\begin{aligned} y^m + m s y^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot s^2 y^{m-2} &\&c... + k = 0. \\ + a y^{m-1} + (m-1) \cdot a s y^{m-2} &\&c. \\ + & b y^{m-2} \&c. \end{aligned}$$

Si donc nous regardons y comme l'inconnue , il est évident que cette équation sera sans second terme , si s est telle que l'on ait $ms + a = 0$, c'est-à-dire , si l'on prend $s = -\frac{a}{m}$, qui est la valeur que cette équation donne pour s .

Or nous venons de voir que nous pouvions prendre pour l'une des trois inconnues , & par conséquent , pour s , telle valeur que nous jugerions à propos ; puis donc que $-\frac{a}{m}$ est la valeur qu'il faut lui donner pour que l'équation en y soit sans second terme , il s'ensuit que pour changer l'équation proposée $x^m + a x^{m-1} +$, &c. en une autre qui n'ait point de second terme , il faut faire $x = y - \frac{a}{m}$, ce qui démontre la règle que nous venons de donner.

Par exemple , pour faire disparaître le second terme de l'équation $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$; je fais $x = y - \frac{6}{3}$, c'est-à-dire , $x = y - 2$. En substituant j'aurai

$$\begin{aligned} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0 \\ + 6y^2 - 24y + 24 & \\ - 3y + 6 & \\ + 4 & \end{aligned}$$

qui

qui se réduit à $y^3 - 15y + 26 = 0$, équation qui n'a point le second terme y^2 .

De la Résolution des Équations composées.

193. Nous supposons, dans tout ce que nous allons dire, qu'on ait fait passer dans un seul membre, tous les termes de l'équation.

Nous avons déjà dit (54) ce qu'on doit entendre par ces mots *résoudre une équation* ; mais il faut ici fixer plus particulièrement ce que l'on entend par *résolution générale d'une équation*.

Résoudre généralement une équation d'un degré quelconque, telle que $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + k = 0$; c'est trouver pour l'inconnue autant de valeurs qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette inconnue, & dont chacune soit exprimée par les lettres p , q , &c. k combinées entre elles de quelque manière que ce soit, telle cependant que chacune de ces valeurs substituée au lieu de x dans l'équation, réduise le premier membre à zéro, indépendamment de toute valeur particulière de p , q , &c.

Par exemple, la règle que nous avons donnée (100) pour les équations du second degré, résout généralement ces équations. En effet, $x^2 + px + q = 0$, peut représenter toute équation du second degré, parce que par p & q on peut entendre toutes sortes de nombres, positifs ou négatifs ; or cette équation résolue suivant cette même règle, donne ces deux valeurs de x , $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Que l'on substitue maintenant l'une de ces deux valeurs, celle-ci, par exemple, $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, au lieu de x dans le premier membre de l'équation $x^2 + px + q = 0$; on aura

Marine. Algèbre.

O

$(-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)})^2 + p(-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}) + q$,
 qui revient à $\frac{1}{4}p^2 - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} + \frac{1}{4}p^2 - q - \frac{1}{2}p^2 +$
 $p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} + q$, qui, toute réduction faite, se réduit à
 zéro. Il en seroit de même, si l'on substituoit $-\frac{1}{2}p -$
 $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$.

Cette expression générale des différentes valeurs de x dans une équation, est d'autant plus difficile à trouver, que le degré de l'équation est plus élevé, & il est aisé de sentir que cela doit être, si l'on fait les réflexions suivantes.

Quelle que puisse être la forme des valeurs de l'inconnue dans une équation de degré quelconque, il est certain que la résolution générale d'une équation d'un degré déterminé doit renfermer la résolution des équations générales de tous les degrés inférieurs.

En effet, la résolution générale d'une équation du cinquième degré, par exemple, telle que $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, doit donner pour x cinq valeurs, dont chacune doit nécessairement renfermer toutes les lettres p, q, r, s, t . Or lorsque t est zéro, cette équation se réduit à $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx = 0$, qui étant le produit de ces deux facteurs $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, & x , donne 1°. $x = 0$; 2°, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Donc des cinq valeurs de x que donnera la résolution générale, l'une doit alors se réduire à zéro, & les quatre autres doivent être les racines de l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Or celle-ci n'étant que du quatrième degré, ses racines ne peuvent avoir que la forme de celle du quatrième degré; donc puisqu'elles sont en même temps comprises dans celles du cinquième degré, il faut que la résolution de celle-ci comprenne la résolution du quatrième. On prouvera de même que la résolution du quatrième doit comprendre celle du troisième, & ainsi de suite. Donc la résolution d'une équation

de degré quelconque, doit comprendre la résolution de tous les degrés inférieurs.

De-là on peut conclure que l'expression de l'une quelconque des racines, doit renfermer toutes les espèces de radicaux depuis son degré jusqu'au premier (*). En effet, il est facile de voir que dans quelque degré que ce soit, il doit y avoir des radicaux de ce degré, puisque, dans le cas particulier où tous les termes, excepté le premier & le dernier, manqueroient, l'expression des valeurs de x renfermeroit un pareil radical; car l'équation étant alors $x^m + k$, on auroit $x = \sqrt[m]{-k}$; donc puisque la forme générale des racines doit comprendre la forme de celles de tous les degrés inférieurs, elle doit renfermer tous les radicaux, depuis son degré, jusqu'au premier.

194. Après ces réflexions sur la forme des racines, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver.

Celle que nous allons exposer, consiste à considérer l'équation qu'il s'agit de résoudre, comme le résultat de deux équations à deux inconnues. Nous avons vu ci-dessus (167), comment on parvenoit à réduire ces deux-ci à une seule, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Il s'agit donc de les choisir telles que l'élimination produise une équation que l'on

(*) Lorsque l'exposant de l'équation est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres, il peut arriver, selon la méthode qu'on emploiera pour résoudre, que l'expression générale des racines ne renferme pas explicitement les radicaux de ce degré; mais il n'y sont pas moins implicitement. Par exemple, dans le quatrième degré; au lieu des $\sqrt[4]{}$, on trouve, par certaines méthodes, des quantités telles que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, mais on voit que celles-ci comprennent les premières.

puisse supposer la même que l'équation proposée. Nous allons voir quelles elles doivent être pour cet effet.

Quoique cette méthode n'exige pas qu'on fasse disparaître le second terme de l'équation proposée, cependant les calculs étant plus simples, lorsqu'il n'y a pas le second terme, nous supposerons qu'on a fait évanouir celui-ci, par la méthode donnée (192).

Ainsi nous supposerons que $x^m + p x^{m-2} + q x^{m-3} + r x^{m-4} + \&c. + k = 0$, est en général l'équation qu'il s'agit de résoudre.

On prendra les deux équations $\dots y^m - 1 = 0$.
& $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} + \&c. + x = 0$,
 $a, b, c, \&c.$ étant des quantités inconnues que l'on déterminera comme il va être dit.

Par le moyen de ces deux dernières on éliminera y , ce qui conduira à une équation en x , qui sera du degré m , & n'aura point de second terme.

Les coefficients (*) des différentes puissances de x , seront composés de $a, b, c, \&c.$ & leurs puissances.

On égalera chaque coefficient, au coefficient de pareille puissance de x dans l'équation proposée $x^m + p x^{m-2} + \&c.$; ce qui donnera autant d'équations pour déterminer $a, b, c, \&c.$ qu'il y a de ces quantités. Lorsque $a, b, c, \&c.$ auront été déterminés, on aura toutes les racines ou valeurs de x , en substituant dans l'équation $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} + \&c. \dots + x = 0$, ces valeurs de $a, b, c, \&c.$ & mettant

<p>(*) Le mot <i>coefficient</i> est pris ici dans un sens plus étendu que par le passé. Il signifie en général la totalité des quantités soit nu-</p>	<p>mériques, soit littérales, qui multiplient l'une quelconque des puissances de x. Ainsi dans $p x^{m-2}$, p est le coefficient de x^{m-2}.</p>
--	--

successivement pour y , chacune des racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$ qui sont faciles à déterminer, comme nous le verrons par la suite.

Application au troisième degré.

195. Soit donc $x^3 + px + q = 0$, l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Je prends $y^3 - 1 = 0$, & $ay^2 + by + x = 0$. Pour chasser y , je multiplie cette dernière par y , & mettant pour y^3 , la valeur 1 tirée de l'équation $y^3 - 1 = 0$, j'ai $by^2 + xy + a = 0$. Je multiplie, de même, celle-ci par y , & mettant encore pour y^3 , la valeur 1, j'ai $xy^2 + ay + b = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, j'ai les trois équations } ay^2 + by + x &= 0 \\ by^2 + xy + a &= 0 \\ xy^2 + ay + b &= 0 \end{aligned}$$

Par le moyen des deux premières, je prends la valeur de y^2 & celle de y , selon la méthode des équations du premier degré, à deux inconnues; j'ai $y^2 = \frac{ax - ab}{bb - ax}$ & $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

Je substitue ces valeurs dans la troisième équation. . . .
 $xy^2 + ay + b = 0$; j'ai $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0$, ou,
 éliminant le dénominateur & réduisant, $x^3 - 3abx + a^3 = 0$,
 $+ b^3$

Comparant cette équation avec $x^3 + px + q = 0$; il faut (*) pour qu'elles soient les mêmes, que $-3ab = p$,

(*) On pourroit peut-être demander s'il est nécessaire, pour que les deux équations deviennent les mêmes, de les égaler terme à terme; & s'il ne suffiroit pas d'écrire $x^3 + px + q = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$? Voici la réponse. Il est indispensable d'égaliser

& $a^3 + b^3 = q$; ce sont là les deux équations qui donneront a & b .

La première donne $b = -\frac{p}{3a}$; substituant dans la seconde, on a $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, ou en multipliant par a^3 ; & transposant, $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, équation qu'on peut (173) résoudre comme une équation du second degré, & qui par conséquent deviendra $a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, puis $a^3 - \frac{1}{2}q = \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$; transposant, $a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$, & enfin $a = (*) \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Pour avoir b , je mets dans l'équation $a^3 + b^3 = q$, la valeur de a^3 que nous venons de trouver, & j'ai $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} + b^3 = q$, & par conséquent $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$; donc $b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Or l'équation $ay^2 + by + x = 0$, donne $x = -ay^2 - by$; on a donc $x = -y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - y \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, qui renferme les trois racines.

terme à terme ; parce que pour que les deux équations soient les mêmes il faut que les trois racines soient les mêmes dans chacune ; or cette condition exige que la somme des racines soit la même ; ce qui a lieu. 2°. Que la somme $-3ab$ des produits de ces racines deux à deux, dans l'une, soit la même que la somme p des mêmes

produits dans l'autre. 3°. Que le produit $a^3 + b^3$ des trois racines de l'une, soit le même que le produit q des trois racines de l'autre.

(*) Je ne donne ici qu'un seul signe au second radical, parce que je n'ai besoin que d'une valeur de a ; il importe peu laquelle : chacune satisfait également comme nous le verrons ci-après.

Il ne s'agit donc plus que de connoître les valeurs de y . Or l'équation $y^3 - 1 = 0$, donne $y^3 = 1$, & par conséquent, en tirant la racine cubique, $y = 1$. Pour avoir les deux autres racines, je divise (151) $y^3 - 1$ par $y - 1$, & j'ai $y^2 + y + 1$, qui étant égale à zéro, donne l'équation qui renferme les deux autres racines. Cette équation $y^2 + y + 1 = 0$ étant résolue, donne $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, les trois valeurs de y sont donc $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Substituant successivement ces valeurs, dans $x = -y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, $-y \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, & faisant attention que $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ & $\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ se réduisent, le premier à $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, & le second à $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, on a ces trois valeurs de x ,

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \\ - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \\ + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \\ + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Si l'on suppose, dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, que $q = 0$; l'équation se réduit alors à $x^3 + px = 0$, ou $(x^2 + p) \times x = 0$;

donc l'une des racines est $x = 0$, & les deux autres se trouvent en résolvant l'équation $x^2 + p = 0$, qui donne $x = +\sqrt{-p}$, & $x = -\sqrt{-p}$; c'est aussi ce que donne la formule générale des racines; car la première devient alors $x = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$, c'est-à-dire, $x = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} = 0$; la 2^e. devient $x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$
 $= \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$
 $= \sqrt{-3} \sqrt[6]{\frac{1}{27}p^3} = \sqrt{-3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}p} = \sqrt{-p}$. On verra de même que la troisième est $-\sqrt{-p}$.

196. Comme l'équation $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$, d'où nous avons déduit la valeur a , a six racines, on pourroit peut-être demander si chacune peut être également employée; & si dans le cas où elles seroient toutes également admissibles, il n'en résulteroit pas 18 valeurs différentes pour x , puisque chacune en donneroit trois.

Chacune des six valeurs de a est également bonne; mais l'une quelconque, donne pour x les mêmes valeurs que toute autre. En voici la preuve:

Faisons, pour simplifier le calcul.
 $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})]} = m$, &
 $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})]} = n$; alors l'équation $a^3 = \frac{1}{2}q \pm (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})$ trouvée ci-dessus, se changera en ces deux autres $a^3 = m^3$, & $a^3 = n^3$; la première donne $a = m$, & en divisant $a^3 - m^3$ par $a - m$, on aura $a^2 + ma + m^2$ qui étant égalé à zéro, donnera les deux autres valeurs de a , que l'on trouvera être $a = \frac{-m \pm m\sqrt{-3}}{2}$, ou $a = m \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right)$;

ainsi les trois valeurs de a sont m , $m \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ & $m \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. On trouvera de même que l'équation $a^3 = n^3$ donne ces trois autres $a = n$, $a = n \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $a = n \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Or puisqu'on a $a^3 + b^3 = q$, on aura $m^3 + b^3 = q$ & $n^3 + b^3 = q$, & en mettant pour m^3 & n^3 leurs valeurs, $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ & $b^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, c'est-à-dire, $b^3 = n^3$ & $b^3 = m^3$; donc les valeurs de b sont telles que $ab = mn$, en sorte que les valeurs de a & b , qui doivent aller l'une avec l'autre, sont telles qu'il suit :

$$\begin{aligned} a &= m \dots\dots\dots b = n \\ a &= m \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right), b = n \left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} \right) \\ a &= n \dots\dots\dots b = m \\ a &= n \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right) b = m \left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} \right) \end{aligned}$$

Substituez maintenant l'une quelconque de ces six combinaisons dans $x = -ay^2 - by$, en mettant successivement par y les trois valeurs, & vous aurez toujours ces trois racines $x = -m - n$ $x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot m + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot n$, $x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot m + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot n$

197. En considérant les trois valeurs de x que nous avons trouvées ci-dessus, on voit que tant que p sera positif, la quantité $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ sera toujours positive, parce que $\frac{1}{4}q^2$ qui est le quarré de $\frac{1}{2}q$ sera toujours positif, quand même q seroit négatif. Cette même quantité sera encore positive, tant que $\frac{1}{4}q^2$ sera plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, p étant négatif. Dans

ces deux cas, les deux dernières valeurs de x sont imaginaires. Car les deux radicaux cubes étant alors des quantités réelles & inégales, leur produit par les quantités $\sqrt{-3}$ & $-\sqrt{-3}$ de signes contraires, ne se détruiront pas mutuellement; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ceux valeurs de x . Il n'y a donc alors que la première valeur de x , qui soit réelle.

198. Mais si p étant négatif, $\frac{1}{27}p^3$ se trouvoit plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ seroit une quantité négative, & la quantité $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$ seroit imaginaire: néanmoins les trois valeurs de x sont alors réelles.

Pour s'en convaincre, il faut d'abord observer que $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$ qu'on a alors au lieu de $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}$, est la même chose que $\sqrt{\left[\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right) \times -1\right]}$, ou que $\sqrt{\left[\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right) \times \sqrt{-1}\right]}$; ainsi, pour abréger, je suppose $\frac{1}{2}q = m$ & $\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)} = n$, la quantité $\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \left(\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}\right)\right]}$ deviendra $\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})}$; or ces quantités étant la même chose (133) que $(m + n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ & $(m - n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, si on les réduit en série, par la méthode donnée (151), on aura pour la première.

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1} \&c.\right)$$

& pour la seconde.

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} - \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1} \&c.\right);$$

or ces trois valeurs de x se changent alors en.

$$x = -\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}.$$

Substituant, au lieu des deux radicaux cubes, les séries qui

en font les valeurs, on aura, après avoir fait les multiplications par $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, qui se rencontrent dans les deux dernières valeurs de x , & après les réductions ordinaires, ayant d'ailleurs égard à ce que $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1}$ donne $-\sqrt{3}$ (*), & que tout est multiplié par $m^{\frac{1}{3}}$, on aura, dis-je.

$$x = -m^{\frac{1}{3}} \left(2 + \frac{2}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{20}{243} \frac{n^4}{m^4}, \&c. \right)$$

$$x = m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4}, \&c. \right) - m^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3} \frac{n}{m} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5}, \&c. \right)}$$

$$x = m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4}, \&c. \right) + m^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3} \frac{n}{m} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5}, \&c. \right)}$$

Quantités dans lesquelles il n'y a plus d'imaginaires. On n'a pu trouver, jusqu'à présent, que cette manière de donner, dans ce cas, une valeur algébrique réelle aux trois racines; ainsi on ne peut les avoir alors sous une forme réelle, que par approximation. Ce cas singulier a fort exercé les Algébristes, & on lui a donné le nom de *cas irréductible*.

Donnons maintenant quelques exemples.

Supposons qu'on demande les racines de l'équation. . . .
 $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; je commence par faire disparaître (192) son second terme, en faisant $y = x - 2$; cela réduit l'équation à $x^3 - 15x + 26 = 0$; or nous avons représenté toute équation du troisième degré, sans second terme, par $x^3 + px + q = 0$; nous avons donc $p = -15$, $q = 26$; donc $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; $\frac{1}{3}p = -5$, & $\frac{1}{27}p^3 = -125$; donc $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 \right)} = \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{44}$; les trois valeurs de x seront donc.

$$x = -\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} - \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

(*) Voyez la note de la page 137.

C'est-à-dire, que la première est négative, & les deux autres imaginaires.

Prenons pour second exemple, l'équation $x^3 - 9x - 10 = 0$. Dans ce cas, on a $p = -9$, $q = -10$; par conséquent $\frac{1}{3}p = -3$, $\frac{1}{27}p^3 = -27$, $\frac{1}{2}q = -5$ & $\frac{1}{4}q^2 = 25$; donc $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 25 - 27 = -2$; cette équation est donc dans le cas irréductible. Ainsi, si l'on veut avoir les valeurs de x , il faut faire usage des séries ci-dessus. Pour cet effet, on remarquera qu'on a supposé $m = \frac{1}{2}q$, & $n = \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}$; donc $m = -5$ & $n = \sqrt{2}$. Pour faire les substitutions, on commencera par évaluer $\sqrt{2}$ qu'on trouvera être 1,4142; donc $\frac{n}{m} = \frac{1,4142}{-5} = -0,2828$; on évaluera aussi $m^{\frac{1}{3}}$, qui n'est autre que $\sqrt[3]{m}$ ou $\sqrt[3]{-5}$ ou $-\sqrt[3]{5}$, & l'on aura $m^{\frac{1}{3}} = -1,7099$; alors il n'y a plus qu'à substituer: nous nous bornerons à substituer dans la première qui deviendra $x = +1,7099 \left\{ 2 + \frac{2}{3} (0,2828)^2 - \frac{20}{243} (0,2828)^4 \&c. \right\}$ quantité dans laquelle il ne s'agit plus que de faire les multiplications indiquées. Mais il est bon d'observer en finissant, que ces séries ne sont d'un usage utile, qu'autant que m est plus grand que n ; s'il étoit plus petit, on en formeroit d'analogues pour ce cas, en observant ce qui a été dit (159). Au reste, lorsque m & n diffèrent peu, on est dans la nécessité de calculer un grand nombre de termes. Nous verrons par la suite comment on peut approcher autrement des valeurs de x .

199. Concluons de ce qui précède, que toute équation de cette forme $y^{3n} + py^{2n} + qy^n + r = 0$ est résoluble; puisqu'en faisant $y^n = x$, on a $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; c'est-à-dire, une équation du troisième degré.

Application au quatrième degré.

200. Représentons toute équation du quatrième degré sans second terme, par $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Selon la règle donnée ci-dessus, je prends les deux équations

$$y^4 - 1 = 0$$

$$\text{Et } ay^3 + by^2 + cy + x = 0.$$

Pour éliminer y , je multiplie celle-ci trois fois de suite par y , & je substitue à mesure, au lieu de y^4 , la valeur 1 tirée de l'équation $y^4 - 1 = 0$; ce procédé me donne (en comprenant la seconde équation), les quatre équations suivantes :

$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0$$

$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$

$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$$

$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

Si, à l'aide des trois premières, on tire les valeurs de y^3 , y^2 & y , on aura $y^3 = \frac{-x^3 + b^2x - bc^2 + 2acx - a^2b}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$, $y^2 = \frac{cx^2 - 2abx + a^3 - ac^2 + b^2c}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$, & $y = \frac{-a^2x + bx^2 - c^2x - b^3 + 2abc}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$; substituant dans la dernière, on aura, après avoir chassé le dénominateur, fait les réductions ordinaires, & changé les signes,

$$x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 = 0$$

$$- 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4$$

$$+ b^4$$

$$+ 2a^2c^2$$

$$- 4ab^2c$$

pour que cette équation soit la même que $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, il faut donc que $-4ac - 2b^2 = p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$,

$-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$; ce sont ces trois équations qui doivent faire connoître a , b & c .

Pour avoir l'équation qui donnera b , je prends dans la seconde la valeur de $a^2 + c^2$, en divisant par $4b$; & j'ai $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$; je quarre cette équation, ce qui me donne $a^4 + 2a^2c^2 + c^4 = \frac{qq}{16b^2}$; & par conséquent $a^4 + c^4 = \frac{qq}{16b^2} - 2a^2c^2$; je substitue cette valeur de $a^4 + c^4$ dans la troisième équation, & j'ai $-\frac{qq}{16b^2} + 4a^2c^2 + b^4 - 4ab^2c = r$. De la première équation $-4ac - 2b^2 = p$, je tire la valeur de ac , qui est $ac = \frac{-p - 2b^2}{4}$; substituant dans l'équation $-\frac{qq}{16b^2} + 4a^2c^2$, &c. j'ai $-\frac{qq}{16b^2} + 4\left(\frac{-p - 2b^2}{4}\right)^2 + b^4 - 4b^2 \cdot \left(\frac{-p - 2b^2}{4}\right) = r$, ou $-\frac{qq}{16b^2} + \frac{4p^2 + 16pb^2 + 16b^4}{16} + b^4 + \frac{4pb^2 + 8b^4}{4} = r$, ou enfin, chassant les fractions, transposant, réduisant, & ordonnant par rapport à b

$$64b^6 + 32pb^4 + 4p^2b^2 - qq = 0 \\ - 16rb^2$$

Équation du sixième degré, mais qui n'a que la difficulté de celles du troisième, en regardant b^2 comme l'inconnue: on appelle cette équation *la réduite*, parce que c'est à sa résolution que se réduit celle des équations du quatrième degré.

201. Si l'on fait attention que le dernier terme q^2 de cette équation a le signe —, on verra que b^2 doit avoir au moins une valeur positive; car dans ce cas l'équation ne peut avoir été produite que par la multiplication de trois facteurs tels que $(b^2 - l)(b^2 - m)(b^2 - n)$, ou de trois facteurs tels que $(b^2 + l)(b^2 + m)(b^2 - n)$; il n'y a que ces deux combinaisons qui puissent donner le signe — au dernier terme;

il y aura donc au moins un facteur de cette forme $b^2 - n$; donc (178) $b^2 = n$, c'est-à-dire, que b^2 aura au moins une valeur positive. Donc puisque cette équation donne $b = \pm \sqrt{n}$, b aura donc au moins deux valeurs réelles.

202. Déterminons maintenant a & c . Les deux équations $-4ac - 2b^2 = p$, & $4a^2b + 4bc^2 = q$ trouvées ci-dessus, donnent $2ac = -\frac{1}{2}p - b^2$ & $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$. Ajoutant la première à la seconde, & la retranchant aussi de la seconde, on aura les deux équations suivantes :

$$a^2 + 2ac + c^2 = \frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = \frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2$$

tirant la racine quarrée de chacune, on aura

$$a + c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$$

$$\& a - c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Les deux signes de chaque équation pouvant être pris dans tel ordre que l'on voudra.

De-là il est aisé de déduire a & c ; mais nous allons voir qu'on n'a besoin que de $a + c$ & de $a - c$. Développons auparavant les quatre valeurs de x .

L'équation $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, donne $x = -ay^3 - by^2 - cy$; il s'agit donc d'avoir les quatre valeurs de y que peut donner l'équation $y^4 - 1 = 0$, ou $y^4 = 1$. Or en tirant la racine quatrième, on a $y = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$, c'est-à-dire, $y = 1$ & $y = -1$. Ayant trouvé ces deux valeurs de y , il faut (187) pour avoir les deux autres, diviser $y^4 - 1$ par le produit $y^2 - 1$ des deux facteurs $y - 1$ & $y + 1$,

ce qui donne $y^2 + 1$ pour quotient ; égalant ce quotient à zéro (187) on aura $y^2 + 1 = 0$, pour l'équation qui doit donner les deux autres racines, que l'on trouvera être $y = +\sqrt{-1}$ & $y = -\sqrt{-1}$.

Les quatre valeurs de x seront donc

$$\begin{aligned} x &= -a - b - c & \text{ou } x &= -b - (a + c) \\ x &= a - b + c & \text{ou } x &= -b + (a + c) \\ x &= a\sqrt{-1} + b - c\sqrt{-1} & \text{ou } x &= +b + (a - c)\sqrt{-1} \\ x &= -a\sqrt{-1} + b + c\sqrt{-1} & \text{ou } x &= +b - (a - c)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Substituant, au lieu de $a + c$ & $a - c$, leurs valeurs trouvées ci-dessus, & faisant attention que $\pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)} \times \sqrt{-1}$.

$$\begin{aligned} &= \pm\sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, \text{ on aura} \\ x &= -b \mp \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, x = -b \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}. \\ x &= +b \pm \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, x = +b \mp \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}. \end{aligned}$$

Equations dans lesquelles il est facile de voir que des deux signes $+$ & $-$, soit qu'on prenne le signe supérieur, soit qu'on prenne le signe inférieur, on aura toujours les quatre mêmes valeurs de x , l'une quelconque d'entre elles ne faisant alors que se changer en l'une des autres. Ainsi, pour une même valeur de b , on n'aura jamais que quatre valeurs de x ; savoir:

$$\begin{aligned} x &= -b - \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, x = -b + \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}. \\ x &= +b + \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, x = +b - \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}. \end{aligned}$$

203. Puisque l'équation du sixième degré qui doit donner b , donne trois valeurs de b^3 , on aura donc trois valeurs de b , qui auront le signe $+$, & trois qui auront le signe $-$; or il est facile de voir que soit qu'on mette $+b$, soit qu'on mette

mette $-b$ dans les quatre dernières valeurs de x , il en résulte toujours les quatre mêmes valeurs. Il ne s'agit donc plus que de faire voir, que chacune des trois valeurs de b qui auront le signe $+$, ne donnera jamais aussi que les mêmes quatre valeurs de x .

Pour le démontrer, reprenons les équations $-4ac - 2b^2 = p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$, & $-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$. Quarrons la deuxième de ces équations; nous aurons $16b^2(a^2 + c^2)^2 = qq$; mettons, au lieu de b^2 , sa valeur $\frac{-p-4ac}{2}$ tirée de la première; il viendra $-8(p+4ac)(a^2 + c^2)^2 = qq$. Substituons de même, au lieu de b^2 , sa valeur dans la troisième équation, & nous aurons, après les réductions faites, $-a^4 - c^4 + \frac{pp}{4} + 4pac + 14a^2c^2 = r$.

Reprenons maintenant l'équation du sixième degré. . . .

$$64b^6 + 32pb^4 + 4ppb^2 - qq = 0.$$

$$- 16rb^2$$

Et substituons-y pour qq & pour r leurs valeurs que nous venons de calculer. Nous aurons après les réductions faites, & après avoir divisé par 8, l'équation suivante

$$8b^6 + 4pb^4 + 2a^4b^2 + (p+4ac)(a^2 + c^2)^2 = 0$$

$$+ 2c^4b^2$$

$$- 8pacb^2$$

$$- 28a^2c^2b^2$$

Or puisqu'on a trouvé $2b^2 = -p - 4ac$, il s'ensuit (187) que $2b^2 + p + 4ac$ doit diviser l'équation $8b^6 + 4pb^4$, &c.; ce qui a lieu en effet. Si l'on fait la division, & qu'on égale ensuite à zéro, le quotient, pour avoir les deux autres valeurs de b^2 , on aura $4b^4 - 8acb^2 + a^4 + c^4 + 2a^2c^2 = 0$.

Cette équation étant résolue comme une équation du second

degré, donne $2b^2 = 2ac \pm (a+c)(a-c)\sqrt{-1}$, ou, en doublant, $4b^2 = 4ac \pm 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}$. Or le dernier membre est (*) le quarré de $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; donc $4b^2 = [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2$, & par conséquent (**) $2b = + [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]$, c'est-à-dire, $= (a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; ainsi, puisqu'on a trouvé ci-dessus, $b^2 = \frac{-P-4ac}{2}$, les trois valeurs positives de b , sont donc...

$b = + \sqrt{\left(\frac{-P-4ac}{2}\right)}$. $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$,
 $b = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$. Représentons la seconde de ces valeurs, par b' , & la troisième par b'' ; alors en ajoutant & retranchant, on aura $a+c = b' + b''$ & $(a-c)\sqrt{-1} = b' - b''$.

Si l'on substitue les valeurs de $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ dans les quatre premières valeurs de x trouvées ci-dessus, elles se réduiront à $x = -b - b' - b''$, $x = -b + b' + b''$, $x = +b + b' - b''$, $x = +b - b' + b''$, qu'on peut encore mettre sous cette forme, $x = -b - b' - b''$, $x = +b + b' + b'' - 2b$, $x = +b + b' + b'' - 2b''$, $x = b + b' + b'' - 2b'$. Où l'on voit clairement qu'il ne peut y avoir que quatre valeurs de x ; car si l'on change, par exemple, b en b' , il faut changer en même temps b' en b , puisqu'on voit que les trois racines b , b' , b'' entrent toutes à la fois dans chacune de ces valeurs de x . Or ce changement donne les quatre mêmes valeurs pour x .

(*) Il ne faut autre chose, pour s'en assurer, que quarrer la quantité $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$. Mais si l'on demande comment on a trouvé cela, on le verra dans la suite.

(**) Nous ne prenons ici que le signe $+$ pour la racine du second membre, parce que nous avons vu, ci-dessus, que la valeur négative de b , mèneroit aux mêmes conclusions.

204. Revenons maintenant à la première expression des valeurs de x , c'est-à-dire, aux valeurs $x = -b - b - (a + c)$, $x = -b + (a + c)$, $x = +b + (a - c)\sqrt{-1}$, $x = +b - (a - c)\sqrt{-1}$. Elles nous offrent trois cas : ou $a + c$ & $(a - c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, ou elles sont toutes deux imaginaires, ou enfin l'une des deux est réelle, & l'autre imaginaire. Or j'observe d'abord que lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent toujours être réduites à des imaginaires de cette forme, $\sqrt{-m}$, ou $\sqrt{m} \cdot \sqrt{-1}$, m étant une quantité réelle ; car puisqu'on a $a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$ & $(a - c)\sqrt{-1} = \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, b ayant toujours (201) au moins une valeur réelle que l'on peut toujours employer, elles ne peuvent devenir imaginaires que lorsque la quantité qui est sous le radical actuel, sera négative (*).

205. Cela posé, si $a + c$ & $(a - c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, auquel cas, les quatre valeurs de x seront réelles, puisque b a toujours une valeur réelle, il est évident que les deux autres valeurs de $4b^2$, savoir : $[(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$ seront réelles & positives.

206. Si au contraire $a + c$ & $(a - c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux imaginaires, auquel cas les quatre valeurs de x seront imaginaires, alors si on représente $a + c$ par $k\sqrt{-1}$ & $(a - c)\sqrt{-1}$ par $l\sqrt{-1}$, k & l seront des quantités réelles, selon ce qui vient d'être dit (204) ; on aura donc $4b^2 = [(k \pm l)\sqrt{-1}]^2 = -(k \pm l)^2$; c'est-à-dire, que les deux autres valeurs de b^2 seront réelles, mais négatives.

(*) Il n'en seroit pas de même, si b n'avoit aucune valeur réelle. Car b étant une imaginaire de cette forme $\sqrt{-k}$, $a + c$ & $(a - c)\sqrt{-1}$ pourroient être des imaginaires de cette forme $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}} - h\right)}$.

207. Enfin, si des deux quantités $a + c$ & $(a - c)\sqrt{-1}$, l'une seulement est réelle, il est évident que, des quatre valeurs de x , deux seront réelles, & deux imaginaires; or dans ce cas on voit aussi clairement, que les deux valeurs de $4b^2$ exprimées par $[(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$ seront imaginaires.

208. Donc si la réduite, considérée comme équation du troisième degré, a ses trois racines réelles & positives, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines réelles.

Si la réduite, ayant ses trois racines réelles, n'en a qu'une positive, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines imaginaires.

Enfin, de ces quatre racines, deux seront réelles & deux seront imaginaires, si la réduite n'a qu'une racine réelle.

209. Puisque la formule des racines d'une équation du troisième degré, ne donne ces racines sous une forme réelle, que lorsqu'il n'y a qu'une racine réelle (197), il faut conclure qu'on n'aura les racines du quatrième degré sous une forme réelle, que lorsqu'il n'y aura que deux de ces racines qui soient réelles.

210. Voyons quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation $x^4 + 3x^2 - 52x + 48 = 0$. Nous avons ici $p=3$, $q=-52$, $r=48$, & par conséquent $qq=2704$. La réduite sera donc $64b^6 + 96b^4 - 732b^2 - 2704 = 0$, ou (en faisant, pour simplifier, $4b^2 = u$), $u^3 + 6u^2 - 183u - 2704 = 0$. Pour faire disparaître le second terme, je fais $u = z - 2$, ce qui me donne $z^3 - 195z - 2322 = 0$.

Selon ce qui a été dit (197) sur les équations du troisième degré, on trouvera que z n'a qu'une valeur réelle qui est

$z = -\sqrt[3]{-1161 + (\sqrt{1073296})} - \sqrt[3]{-1161 - \sqrt{1073296}}$, or $\sqrt{1073296}$ est 1036 ; on a donc $z = -\sqrt[3]{-1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 - 1036}$; c'est-à-dire, $z = -\sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{-2197}$, ou $z = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197}$, ou $z = 5 + 13 = 18$. Donc puisque $u = z - 2$, on a $u = 18 - 2 = 16$; par conséquent $4b^2 = u = 16$; donc $b^2 = 4$ & $b = 2$. Substituant cette valeur de b , & celles de p, q & r , dans les valeurs de $a + c$ & de $(a - c)\sqrt{-1}$ trouvées ci-dessus, on aura $a + c = \sqrt{(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4)} = \sqrt{-12}$; & $(a - c)\sqrt{-1} = \sqrt{(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4)} = \sqrt{1} = 1$. Donc les quatre valeurs de x seront $x = -2 - \sqrt{-12}$, $x = -2 + \sqrt{-12}$, $x = +2 + 1$ & $x = +2 - 1$. Ainsi les deux valeurs réelles sont $x = 3$, & $x = 1$.

Dans cet exemple, les nombres se sont trouvés tels, qu'il a été possible d'évaluer exactement chaque radical. Mais ces cas sont fort rares. Le plus souvent, lorsqu'on veut avoir la valeur numérique dégagée de radicaux, il faut évaluer chaque radical par approximation.

Prenons pour second exemple, l'équation $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$. Je commence par faire disparaître le second terme en faisant (192) $y = x - 1$: j'ai pour nouvelle équation $x^4 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$. On a donc ici, $p = 3, q = 2, r = -3$; ainsi la réduite devient $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$; ou, en faisant $4b^2 = u, u^3 + 6u^2 + 21u - 4 = 0$. Je fais disparaître le second terme, en posant $u = z - 2$, ce qui donne $z^3 + 9z - 30 = 0$, équation qui (197) n'a qu'une racine réelle, & qui annonce, par conséquent (208), que l'équation du quatrième degré n'en aura que deux réelles. Appliquant donc les formules données (195), on trouvera $z = -\sqrt[3]{-15 + \sqrt{252}} - \sqrt[3]{-15 - \sqrt{252}}$,

ou $z = \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$; donc $u = z - 2 = -2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$; donc puisque $4b^2 = u$, & par conséquent $b = \sqrt{\frac{u}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{u}$, on a $b = \frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$. Substituant cette valeur de b , & celle de p & de q , dans les formules des quatre valeurs générales de x , on trouvera que les deux valeurs réelles sont comprises dans cette équation. ...

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}}} - 1 - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}.$$

Réflexions sur la Méthode précédente, & sur son application aux Équations des degrés supérieurs au quatrième.

211. L'équation qui nous a donné la valeur de b pour le quatrième degré, n'a monté qu'au sixième degré; mais si nous avons cherché directement l'équation qui doit donner a , ou celle qui doit donner c , nous serions parvenus à une équation du vingt-quatrième degré, ainsi qu'on peut s'en convaincre de la manière suivante. Nous avons trouvé ci-dessus (203), en transformant la réduite, $-8(p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = qq$, & $-a^4 - c^4 + \frac{p^2}{4} + 4pac + 14a^2c^2 = r$. Si l'on multiplie cette dernière équation, par $8(p + 4ac)$, & que du produit on retranche la première, on aura, après les réductions faites,

$$\begin{aligned} 512a^3c^3 + 256pa^2c^2 + 40ppac + 2p^3 &= 0 \\ - 32rac - 8pr & \\ + qq & \end{aligned}$$

Équation qui étant combinée avec l'équation $-a^4 - c^4 + 8c = r$, pour éliminer c , donnera (169) une équation du vingt-quatrième degré.

Mais sans se donner la peine de faire ce calcul, on peut s'en assurer encore de cette autre manière.

L'équation $-8(p + 4ac)(a^2 + c^2)^2 = qq$ donne $(a^2 + c^2)^2 = -\frac{qq}{8(p + 4ac)}$, & par conséquent $a^4 + c^4 = -\frac{qq}{8(p + 4ac)} - 2a^2c^2$. Or si l'on résout l'équation $512a^3c^3 + 8c$ qui, en considérant ac comme l'inconnue, est du troisième degré, on aura une valeur de ac , qui étant substituée dans le second membre de l'équation $a^4 + c^4 = 8c$ en fera une quantité toute connue que j'appelle A ; si l'on représente maintenant par B , cette valeur de ac , on aura $c = \frac{B}{a}$; donc l'équation $a^4 + c^4 = A$, deviendra $a^8 - Aa^4 = -B^4$, qui ayant huit racines, donnera huit valeurs de a . Or ac a trois valeurs; on aura donc trois équations du huitième degré, & par conséquent 24 valeurs pour a ; donc l'équation en a sera du vingt-quatrième degré.

212. Mais on voit en même temps que les exposans de toutes les puissances de a , que cette équation renfermera, seront des multiples de 4, puisque (183) elle sera le produit de trois quantités de la forme de $a^8 - Aa^4 + B^4$, devant renfermer les 24 racines que ces trois-ci fournissent. Donc si l'on y fait $a^4 = u$, on aura en u , une équation du sixième degré. Or je dis que cette équation ne peut renfermer que des radicaux quarrés & des radicaux cubes, ce qui est évident en résolvant l'équation $a^8 - Aa^4 = -B^4$ comme une équation du second degré; car alors on aura $a^4 = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{2}A)^2 - B^4}$, quantité dans laquelle A & B ne peuvent être composés que

de radicaux quarrés & de radicaux cubes , puisqu'ils ne dépendent que d'une équation du troisième degré.

213. Si l'on se rappelle maintenant ce que nous avons vu sur le troisième degré, où la réduite étoit $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$; il est clair que a^3 ne peut renfermer que des radicaux quarrés. Enfin il est évident que dans l'équation du second degré sans second terme , $x^2 + p = 0$ en faisant comme ci-dessus $y^2 - 1 = 0$ & $ay + x = 0$, la réduite sera $a^2 + p = 0$, qui ne donne qu'une valeur pour a^2 ; ainsi la réduite du second degré ne donne pour a^2 qu'un radical du premier degré , c'est-à-dire , une quantité sans radical.

Donc en remontant , on conclura par analogie , que si la réduite du cinquième degré ne renferme d'autres puissances de a , que celles qui sont des multiples de 5 , la valeur de a^5 ne renfermera que des radicaux quatrièmes , des radicaux cubes & des radicaux quarrés ; donc si l'on démontre que par la méthode actuelle , cette réduite ne peut renfermer que des puissances de a , dont les exposans soient des multiples de 5 , il s'ensuivra que cette même méthode réduit la difficulté des équations du cinquième degré , à celle des degrés inférieurs. Or voici comment on peut s'assurer que la réduite n'aura pas d'autres puissances de a .

214. Supposant que $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, représente généralement toute équation du cinquième degré. Et prenant , selon la méthode , les deux équations $y^5 - 1 = 0$, & $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0$, on aura , après avoir chassé y de la même manière qu'on l'a pratiqué dans le troisième & le quatrième degré , on aura , dis - je

$$\begin{aligned}
 x^5 - 5adx^3 + 5bd^2x^2 - 5cd^3x + a^5 &= 0 \\
 - 5bcx^3 + 5a^2cx^2 - 5a^3bx + b^5 \\
 + 5c^2dx^2 - 5b^3dx + c^5 \\
 + 5ab^2x^2 - 5ac^3x + d^5 \\
 + 5a^2d^2x - 5a^3cd \\
 + 5b^2c^2x - 5ab^3c \\
 - 5abcdx - 5abd^3 \\
 - 5bc^3d \\
 + 5a^2bc^2 \\
 + 5a^2b^2d \\
 + 5b^2cd^2 \\
 + 5ac^2d^2
 \end{aligned}$$

Ayant donc égalé le coefficient de x^3 , à p ; celui de x^2 , à q ; celui de x , à r ; & enfin la totalité des termes sans x , à s ; on aura quatre équations dans lesquelles si l'on fait $b = ga^2$, $c = ha^3$, $d = ka^4$, ce qui est très-permis, ces quatre équations se changeront en quatre autres qui renfermeront g , h , k & a ; mais il n'y aura d'autres puissances de a que a^5 , a^{10} , &c.; donc si l'on conçoit qu'on ait éliminé g , h & k , l'équation finale ne renfermera pas d'autres puissances de a , que celles dont les exposans seront des multiples de 5.

215. On voit donc, d'après tout ce qui précède, qu'à l'égard de a , c'est-à-dire, à l'égard du premier coefficient dans l'équation $ay^{m-1} + by^{m-2} + \dots + x = 0$, la réduite est du second degré ou du degré 1. 2, pour le second degré. Dans le troisième, elle est du sixième degré, ou du degré 1. 2. 3. Dans le quatrième, elle est du vingt-quatrième, ou du degré 1. 2. 3. 4. Il y a donc bien lieu de croire que, dans le cinquième, elle sera du degré 1. 2. 3. 4, 5,

c'est-à-dire, du 120° . ; & du 720° dans le sixième degré ; & ainsi de suite.

Et quoique, dans le quatrième degré, on trouve une réduite qui n'est que du sixième degré, c'est une simplification accidentelle, qui probablement aura lieu d'une manière analogue dans les équations dont l'exposant est un nombre composé, mais non dans celles dont l'exposant est un nombre premier. En effet, il est facile de voir pour le 4° . degré, que cette simplification est due à ce que b , dans chacune des équations où il entre, a des relations semblables à l'égard de a & à l'égard de c ; au lieu que a n'est pas disposé de la même manière à l'égard de b qu'à l'égard de c . Mais dans le cinquième degré, il n'y a aucune des quantités a, b, c, d dont on puisse dire ce que nous venons de dire de b , dans le quatrième; ce qui est facile à voir par les coefficients de l'équation $x^5 - 5(ad + bc)x^3 + \&c., = 0$, rapportée ci-dessus.

216. Quoi qu'il en soit, puisque la réduite du cinquième degré ne peut renfermer d'autres puissances de a que celles dont les exposants sont des multiples de 5, il paroît donc qu'en y faisant $a^5 = u$, l'équation du 24° . degré qu'on aura alors, ne peut plus renfermer que des $\sqrt[4]{}$, des $\sqrt[3]{}$ & des $\sqrt{}$, puisque l'équation $a^5 = u$, donnant $a = \sqrt[5]{u}$, met en évidence les radicaux cinquièmes que doit renfermer l'équation proposée.

On voit par-là ce qu'il y a à dire sur les degrés plus élevés. Ceux qui desireront plus de détails sur cette matière, peuvent consulter les *Mém. de l'Acad. des Sciences*, années 1762 & 1765, où l'on trouvera, en même temps plusieurs classes d'équations qui admettent une résolution algébrique facile, ainsi qu'une autre méthode déduite de celle que nous venons d'exposer, &

qui simplifie le travail dans les équations dont l'exposant n'est pas un nombre premier.

217. Notre méthode suppose, comme on le voit, qu'on puisse toujours avoir toutes les racines de l'équation à deux termes, $y^n - 1 = 0$. Or c'est ce qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'en ayant toujours au moins une, par une simple extraction de la racine du degré n , c'est-à-dire, ayant toujours $y = 1$, lorsque n est impair, & $y = 1, y = -1$ lorsque n est pair, la difficulté d'avoir les autres, est tout au plus de résoudre une équation du degré $n - 1$, ce qu'on est censé savoir déjà, lorsqu'on passe à la résolution d'une équation générale du degré n . Mais la difficulté n'est pas même de ce degré; elle n'est, en général, que du degré $\frac{n-1}{2}$, lorsque n est impair, & du degré $\frac{n-2}{2}$ lorsque n est pair, parce qu'après avoir divisé l'équation $y^n - 1$ par sa racine $y - 1$ lorsque n est impair, ou par $(y - 1) \times (y + 1)$, c'est-à-dire, par $y^2 - 1$ lorsque n est pair, le quotient, ou l'équation qui doit donner les autres racines, sera toujours de cette forme $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \&c., \dots + 1 = 0$, k étant un nombre pair. Or cette équation est décomposable en un nombre $\frac{k}{2}$ de facteurs du second degré, tels que $y^2 + hy + 1$; & l'équation qui donnera h , ne montera jamais qu'au degré $\frac{k}{2}$. Je ne m'arrête pas à démontrer en détail cette dernière proposition; on s'en assurera en prenant, par exemple, pour $y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$, une quantité telle que $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + 1$, la multipliant par $y^2 + hy + 1$, & égalant le produit, terme à terme, à $y^8 + y^7 + \&c.$; on aura des équations dont il sera facile de tirer a, b, c, d, e ; & l'équation en h , sera du

quatrième degré. Voyez , pour la démonstration générale , le tome VI des Mém. de Pétersbourg.

Des Diviseurs commensurables des Équations.

218. On voit , par ce qui précède , que l'expression générale des racines des équations étant un composé de radicaux de différens degrés & différemment mêlés entre eux , il peut très-bien arriver que quoique la valeur d'une ou de plusieurs racines soit un nombre commensurable , néanmoins , elle se présente sous une forme incommensurable ; & c'est ce qui arrive en effet dans le troisième & le quatrième degré , & qui arrivera , plus que probablement , dans les autres degrés. Il est donc utile d'avoir une méthode pour trouver ces diviseurs commensurables , lorsqu'il y en a.

Comme le dernier terme d'une équation est le produit de toutes les racines (180) , aucun nombre ne peut donc être la valeur commensurable de x dans une équation , qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On pourroit donc prendre successivement tous les diviseurs du dernier terme , & les substituer successivement tant en $+$ qu'en $-$, (car x peut avoir aussi bien des valeurs négatives comme des positives) , au lieu de x dans l'équation : alors le diviseur qui , substitué ainsi , réduiroit toute l'équation à zéro , seroit la valeur de x . Bien entendu , que nous supposons ici , qu'on a fait passer tous les termes de l'équation dans un seul membre.

Mais cette opération seroit souvent très-longue ; nous allons faire voir à quel caractère on distingue ceux qu'on doit admettre & ceux qu'on doit rejeter ; mais auparavant , il faut exposer comment on trouve tous les diviseurs d'un nombre.

219. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre , il faut le

diviser successivement par les nombres premiers par lesquels il pourra être divisé, en commençant par les plus simples, & continuer de diviser par le même nombre tant que cela se pourra. Alors on écrit à part & sur une même ligne tous ces nombres premiers, & chacun autant de fois qu'il a pu diviser. On les multiplie ensuite, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. ; ces produits & les nombres premiers qu'on a trouvés, & l'unité, forment tous les diviseurs cherchés.

Par exemple, veut-on avoir tous les diviseurs de 60 ? Je divise 60 par 2, ce qui me donne 30 ; je divise 30 par 2, ce qui me donne 15 ; je divise 15 par 3, ce qui me donne 5 ; enfin je divise 5 par 5, ce qui me donne 1. Ainsi les diviseurs premiers sont 2, 2, 3, 5 ; je les multiplie deux à deux, ce qui me donne 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Je les multiplie trois à trois, & j'ai, 12, 20, 30, 30 ; enfin les multipliant quatre à quatre, j'ai 60.

Rassemblant tous ces diviseurs, en rejetant cependant ceux qui se trouvent répétés, j'ai, en y comprenant l'unité qui est diviseur de tout nombre,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220. Supposons maintenant qu'on veut avoir les diviseurs commensurables d'une équation, lorsqu'elle en a. Par exemple, d'une équation du quatrième degré, représentée généralement par $x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0$. Représentons ce diviseur par $x + a$; alors l'équation proposée peut donc (183) être considérée comme ayant été formée de la multiplication de $x + a$ par un facteur du 3^e. degré, tel que $x^3 + k x^2 + m x + n$; multiplions donc ces deux facteurs l'un par l'autre ; nous aurons

$$\begin{aligned} x^4 + k x^3 + m x^2 + n x + a n &= 0 \\ + a x^3 + a k x^2 + a m x \end{aligned}$$

qui devant être la même chose que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, donne les équations suivantes $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$, ou $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, $1 = \frac{p - k}{a}$.

Supposons donc maintenant qu'ayant pris pour a un des diviseurs du dernier terme, je veux savoir s'il peut être admis; les équations $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$ &c., me disent; divisez le dernier terme de l'équation par ce diviseur; retranchez le quotient du coefficient de x , & divisez le reste par ce même diviseur; retranchez ce second quotient, du coefficient de x^2 , & divisez le reste, encore, par le même diviseur; & continuez toujours de même jusqu'à ce que vous soyiez arrivé au coefficient du second terme de l'équation, pour lequel vous devez trouver 1 pour quotient. Si le diviseur que vous avez pris, satisfait à toutes ces divisions, il peut sûrement être pris pour a ; mais si l'une seulement de ces divisions ne peut être faite exactement, le nombre que vous avez choisi doit être rejeté.

Comme l'unité est toujours diviseur de tout nombre, il est visible qu'il faudra aussi tenter l'unité, tant en $+$ qu'en $-$; mais on aura plutôt fait pour celle-ci de l'examiner en substituant successivement $+1$ & -1 au lieu de x dans l'équation; substitution qui est très-facile, puisque toute puissance de $+1$ est $+1$, & que toute puissance paire de -1 est $+1$, & toute puissance impaire, -1 . Si ni l'une ni l'autre de ces deux substitutions ne donne 0 pour résultat, alors a ne peut être ni $+1$, ni -1 .

Cela posé, voici comment on procédera à l'examen de tous les diviseurs du dernier terme, autres que l'unité.

Supposons qu'on demande si l'équation $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, à quelque diviseur commensurable, je cherche les diviseurs du dernier terme 15, autres que l'unité; les ayant trouvés, je les écris par ordre de grandeur (en les prenant tant en + qu'en -) comme on le voit ici à la première ligne des nombres.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Diviseurs de 15... + 15, + 5, + 3, - 3, - 5, - 15
 + 1, + 3, + 5, - 5, - 3, - 1
 - 21, - 23, - 25, - 15, - 17, - 19
 + 5
 + 18
 - 6
 - 3
 + 1

Je divise le dernier terme. + 15 par chacun des nombres de la première ligne, & j'écris les quotiens, pour seconde ligne.

Je retranche chaque terme de la seconde ligne, du coefficient de x , c'est-à-dire, de - 20, & j'écris les restes pour la troisième ligne.

Je divise chaque terme de celle-ci par le terme correspondant de la première ligne, & à mesure que je trouve un quotient exact, je l'écris. Ici je n'en trouve qu'un, savoir + 5; ainsi je suis sûr qu'il ne peut y avoir qu'un diviseur commensurable. Mais soit qu'il n'y ait qu'un quotient exact, soit qu'il y en ait plusieurs, on continuera en cette manière.

Je retranche chaque quotient, du coefficient 23 de x^2 , & j'écris les restes pour cinquième ligne; c'est ici 18.

Je divise, de même que ci-devant, chacun de ces restes par le terme correspondant de la première ligne, & j'écris chaque quotient au-dessous; c'est ici -6 .

Je retranche chacun de ces nouveaux quotiens, du coefficient -9 de x^3 ; j'écris les restes au-dessous; c'est ici -3 .

Enfin je divise ceux-ci, encore par le terme correspondant de la première suite. Je trouve pour quotient $+1$; d'où je conclus que le terme correspondant -3 , de la première ligne, est a ; & que par conséquent le diviseur $x + a$, est $x - 3$; c'est-à-dire, que $x - 3$ divise l'équation: donc $x = 3$ est la valeur commensurable de x dans l'équation proposée.

Non-seulement, par cette méthode, on trouve le diviseur de l'équation; mais on trouve encore le quotient. Il n'y a qu'à prendre dans la colonne qui a satisfait, les nombres qui se trouvent sur les lignes de numéro pair à compter de la première; ces nombres formeront le dernier terme, & les coefficients successifs de x, x^2, x^3 , &c., dans le second facteur de l'équation. Ici, par exemple, on trouve $-5, +5, -6 + 1$; j'en conclus que le second facteur est $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, ou $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$; en sorte que l'équation proposée, est le produit de $x - 3$ par $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Nous prendrons pour second exemple, l'équation suivante.

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$$

Diviseurs de 14... $+14, +7, +2, -2, -7, -14$
 $+1, +2, +7, -7, -2, -1$
 $-34, -35, -40, -26, -31, -32$
 $-5, -20, +13,$
 $+7, +22, -11,$
 $+1, +11,$

En

En opérant comme dans l'exemple précédent, on ne trouve que les diviseurs 7 & 2, qui soutiennent l'épreuve jusqu'à la dernière ligne; mais le second, c'est-à-dire 2, ne peut satisfaire, parce que le dernier quotient qu'il donne, est 11, au lieu qu'il doit être 1. Ainsi il n'y a qu'un diviseur commun, & c'est $x + 7$.

221. Cette méthode s'applique également aux équations littérales; si elles ont le même nombre de dimensions dans chaque terme, alors on n'écrira en première ligne, que ceux des diviseurs du dernier terme de l'équation, qui ne sont que d'une dimension. Si le nombre des dimensions de chaque terme n'est pas le même, on le rendra tel, en introduisant une lettre dont les puissances complètent ce nombre de dimensions.

Quand le nombre des dimensions est le même dans chaque terme d'une équation, on dit alors que l'équation est homogène.

222. Nous avons supposé que le premier terme n'avoit aucun coefficient; s'il en avoit un, le diviseur, au lieu d'être simplement $x + a$, seroit en général $mx + a$; & m seroit quelqu'un des facteurs du coefficient du premier terme. Alors si l'on vouloit faire usage de la méthode précédente, il faudroit pour chaque facteur, au lieu de la seconde ligne, employer cette seconde ligne multipliée par m ; au lieu de la quatrième, employer cette quatrième multipliée par m , & ainsi de suite; & n'admettre pour a , que les termes de la première, qui auroient pour correspondans dans la dernière, le second facteur du premier terme de l'équation proposée; mais il suffira de prendre en $+$ les nombres que l'on essaiera pour m . Au reste, on peut ramener

Marine. Algèbre.

Q

ce cas au précédent, en faisant évanouir ce coefficient, par la méthode donnée (191).

223. Lorsqu'une équation n'a pas de diviseur commun-surable du premier degré, elle peut néanmoins en avoir du second. On peut trouver ceux-ci par une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer; mais les calculs deviennent très-long. On aura aussi-tôt fait en cette manière. Représentez ce facteur par $x^2 + mx + n$; multipliez-le par un autre facteur convenable pour produire une quantité du degré de l'équation proposée, c'est-à-dire par un facteur du troisième degré, tel que $x^3 + ax^2 + bx + c$, si l'équation proposée est du cinquième. Égalez le produit terme à terme avec l'équation, vous aurez autant d'équations particulières que d'inconnues a, b, c, m, n , &c. De ces équations vous tirerez aisément les valeurs de a, b, c , que vous substituerez dans les équations restantes; alors vous aurez deux équations qui ne renfermeront plus d'inconnues que m & n . Chassez m , par les règles données (167), & cherchez les diviseurs commensurables de l'équation en n . Vous aurez la valeur de n , par le moyen de laquelle & de la valeur de m en n que vous aurez en éliminant, vous déterminerez m , & par conséquent le facteur $x^2 + mx + n$.

On voit par-là comment on doit s'y prendre pour trouver les facteurs commensurables des 3°. , 4°. , &c. degrés.

De l'Extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

224. Les équations qui se résolvent à la manière de celles du second degré (173), conduisent à des expressions de cette

forme $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$, ou $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$, ou &c. Ces quantités peuvent souvent être ramenées à ne renfermer que des quantités rationnelles & de simples radicaux quarrés; ou seulement des radicaux quarrés; ou encore, des radicaux quarrés, multipliés ou divisés par un radical simple de même degré que le radical supérieur. Voyons comment on doit s'y prendre pour les quantités de la forme $\sqrt{C + \sqrt{D}}$.

Je représente cette quantité par $\sqrt{m + \sqrt{n}}$, m & n étant deux inconnues. J'aurai donc $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{m + \sqrt{n}}$; en quarrant, il vient $C + \sqrt{D} = m + 2\sqrt{mn} + n$. Comme j'ai deux inconnues & une seule équation, je suis maître de déterminer l'une de ces inconnues par telle condition que je voudrai; je puis donc supposer $2\sqrt{mn} = \sqrt{D}$, & alors l'équation se réduit à $C = m + n$; je quarre la première de ces deux-ci, & la seconde; j'ai $4mn = D$ & $m^2 + 2mn + n^2 = C^2$; je retranche la première de ces deux équations-ci, de la seconde, & j'ai $m^2 - 2mn + n^2 = C^2 - D$; d'ou l'on voit que pour que m & n soient commensurables, il faut que la valeur de $C^2 - D$ soit un quarré, puisque $m^2 - 2mn + n^2$ est un quarré. Tirant donc la racine quarrée, on aura $m - n = \sqrt{C^2 - D}$; or nous avons, ci-dessus, $m + n = C$; ajoutant & retranchant ces deux équations, & divisant par 2, on aura $m = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$, & $n = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$; donc $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}] + [\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}]}$; or quoique chacun des deux termes de ce second membre renferme deux radicaux, cependant chacun n'en aura véritablement qu'un seul, lorsque $\sqrt{C + \sqrt{D}}$ sera réductible, puisqu'alors $C^2 - D$ fera un quarré, ainsi que nous venons de le voir.

Prenons pour exemple la quantité $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$: ici, $C = 7$, $\sqrt{D} = \sqrt{48}$, & par conséquent $D = 48$; donc

$C^2 - D = 49 - 48 = 1$, & $\sqrt{C^2 - D} = \sqrt{1} = 1$; on aura donc, en substituant, dans la formule que nous venons de trouver, $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Si l'on avoit $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; en faisant passer 6 sous le second radical (112), on auroit $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$, que l'on trouvera de même se réduire à $3 + \sqrt{2}$.

Pour second exemple nous prendrons $\sqrt{4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$ que nous avons dit ci-dessus (203), valoir $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$. Si l'on fait passer $2(a+c)(a-c)$ sous le radical $\sqrt{-1}$, la quantité $\sqrt{4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$, devient $\sqrt{4ac + \sqrt{-4 \cdot (a+c)^2 (a-c)^2}}$; donc $C = 4ac$, $\sqrt{D} = \sqrt{-4(a+c)^2 (a-c)^2}$, ou $D = -4(a+c)^2 (a-c)^2 = -4a^4 + 8a^2c^2 - 4c^4$; donc $C^2 - D = 16a^2c^2 + 4a^4 - 8a^2c^2 + 4c^4 = 4a^4 + 8a^2c^2 + 4c^4$; donc $\sqrt{C^2 - D} = 2(a^2 + c^2)$; donc la formule devient alors $\sqrt{2ac + a^2 + c^2} + \sqrt{2ac - a^2 - c^2}$, c'est-à-dire, $\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{[(a-c)^2 \times -1]}$, qui se réduit à $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$.

Si, au lieu de $\sqrt{C + \sqrt{D}}$, on avoit $\sqrt{C - D}$, au lieu de $\sqrt{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\sqrt{C^2 - D})} + \sqrt{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}}$, on auroit $\sqrt{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}} - \sqrt{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}}$.

225. Voyons maintenant les quantités de la forme . . . $\sqrt[3]{C + \sqrt{D}}$. Si l'on peut tirer exactement la racine cubique de la quantité représentée par $C + \sqrt{D}$, cette racine ne peut être qu'une quantité de cette forme $m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$; car si l'on supposoit qu'elle peut renfermer deux radicaux quarrés, le cube en renfermeroit deux aussi, ainsi qu'on peut le voir en cubant $\sqrt{g} + \sqrt{h}$. Mais on voit, par le même moyen, qu'elle peut renfermer un radical cube, tel que $\sqrt[3]{k}$. Cela

posé, faisons donc $\sqrt[3]{(C + \sqrt{D})} = m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$;
 nous aurons, en cubant, $C + \sqrt{D} = m^3 k + 3 m^2 k \sqrt{n} + 3 m k n + k n \sqrt{n} = m^3 k + 3 m k n + (3 m^2 k + k n) \sqrt{n}$;
 égalant donc la partie irrationnelle, à la partie irrationnelle,
 nous aurons $\sqrt{D} = (3 m^2 k + k n) \sqrt{n}$, & $C = m^3 k + 3 m k n$;
 quarrant la première équation & la seconde, on aura...
 $D = 9 m^4 k^2 n + 6 m^2 k^2 n^2 + k^2 n^3$, & $C^2 = m^6 k^2 + 6 m^4 k^2 n + 9 m^2 k^2 n^2$; retranchant la première de ces deux
 équations, de la seconde, on a $C^2 - D = m^6 k^2 - 3 m^4 k^2 n + 3 m^2 k^2 n^2 - k^2 n^3$, ou multipliant tout par k , $C^2 k - D k = m^6 k^3 - 3 m^4 k^3 n + 3 m^2 k^3 n^2 - k^3 n^3$; tirant la racine
 cubique, il vient $m^2 k - n k = \sqrt[3]{(C^2 k - D k)}$; & par
 conséquent $m^2 - n = \frac{\sqrt[3]{(C^2 - D)k}}{k}$; donc pour que $m^2 - n$
 soit rationnel, & par conséquent, pour que $C + \sqrt{D}$ ait une
 racine cubique, il faut que $(C^2 - D)k$ soit un cube exact,
 ce que l'on peut toujours obtenir en prenant pour k un nombre
 convenable; car k est absolument arbitraire, enforte que si
 $C^2 - D$ est un cube parfait, on fera $k = 1$. Faisons donc,
 pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{(C^2 - D)k}}{k} = p$; nous aurons $m^2 - n = p$,
 & par conséquent $n = m^2 - p$; substituant cette valeur dans
 l'équation $C = m^3 k + 3 m k n$, il viendra, après les réduc-
 tions faites, $4 k m^3 - 3 p k m - C = 0$. Afin donc que m &
 n soient rationnels, il faut que la valeur de m tirée de cette
 dernière équation, soit rationnelle; il faudra donc chercher
 les diviseurs commensurables de cette équation (220), qui
 ne peut manquer d'en avoir, si m & n peuvent être rationnels,
 c'est-à-dire, si la quantité proposée est susceptible d'une racine
 cubique de la forme $m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$.

Prenons, pour exemple, la quantité $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$;

Q 3

nous avons donc ici $C = 20$, $\sqrt{D} = 14\sqrt{2}$, & par conséquent $C^2 = 400$ & $D = 392$, donc $C^2 - D = 8$; c'est-à-dire, un cube: je puis donc faire $k = 1$. Cela posé, j'aurai donc $\sqrt[3]{\frac{(C^2 - D)k}{1}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 1}{1}} = \sqrt[3]{8} = 2$, & par conséquent aussi $p = 2$. L'équation $4km^3 - 3pkm - C = 0$, deviendra donc $4m^3 - 6m - 20 = 0$, ou en divisant par 2, $2m^3 - 3m - 10 = 0$; je fais, maintenant, $m = \frac{y}{2}$ pour faire disparaître (191) le coefficient du premier terme, & j'ai, toute réduction faite, $y^3 - 6y - 40 = 0$, qui (220) a pour diviseur commensurable $y - 4$; donc $y = 4$, & par conséquent $m = 2$; or l'équation $n = m^2 - p$, donne $n = 4 - 2 = 2$; donc $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Prenons pour second exemple, la quantité $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})}$. Ici nous avons $C = 52$, $\sqrt{D} = 30\sqrt{3}$; par conséquent $CC = 2704$, $D = 2700$; donc $CC - D = 4$; donc pour que $(CC - D)k$ devienne un cube, il faut supposer $k = 2$; & alors $\sqrt[3]{\frac{(CC - D)k}{2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2}} = \sqrt[3]{4} = 2$; l'équation $4km^3 - 3pkm - C = 0$ devient donc $8m^3 - 6m - 52 = 0$; faisant $2m = y$, on a $y^3 - 3y - 52 = 0$, qui a pour diviseur commensurable $y - 4$; donc $y = 4$, & par conséquent $m = 2$; d'ailleurs l'équation $n = m^2 - p$, donne $n = 4 - 1 = 3$. Ayant donc $m = 2$, $n = 3$, $k = 2$, on aura $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$.

On voit à présent comment on doit se conduire pour les quantités plus élevées.

De la manière d'approcher des racines des Équations composées.

226. La méthode que nous allons exposer pour approcher de la valeur de l'inconnue dans les équations, suppose qu'on ait déjà une valeur de cette racine, approchée seulement jusqu'à sa dixième partie près. Voyons donc comment on peut se procurer cette première valeur. Prenons pour exemple, l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Je substitue dans cette équation, au lieu de x , plusieurs nombres, tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signes contraires. Lorsque j'en ai rencontré deux de cette qualité, je conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui, substitués au lieu de x , ont donné ces deux résultats, en sorte que si ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de la dixième partie, ou moins de la dixième partie de l'un d'entre eux, j'ai la valeur approchée que je cherche, en prenant l'un ou l'autre, ou un milieu entre eux.

Mais s'ils diffèrent davantage, alors j'opère comme on va le voir.

Je substitue dans l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$ les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. ; mais je m'apperçois bientôt qu'ils donnent tous des résultats positifs, & que cela iroit toujours de même à l'infini. C'est pourquoi je substitue les nombres 0 - 1, - 2, - 3, &c., ce qui me donne les résultats suivans:

<i>Substitutions.</i>	<i>Résultats.</i>
0	+ 6
- 1	+ 10
- 2	+ 8
- 3	- 6
	Q 4

Je m'arrête donc à ces deux derniers, & je conclus que l'une des racines est entre -2 & -3 . Mais comme ces nombres diffèrent de 1, qui est plus grand que la dixième partie de chacun, je prends un milieu entre les deux nombres, c'est-à-dire, que je prends la moitié $-2,5$ de leur somme -5 . Je substitue $-2,5$ au lieu de x dans l'équation, & je trouve pour résultat $+2,875$, c'est-à-dire, une quantité positive; je conclus donc que la racine est entre $-2,5$ & -3 .

Je prends un milieu entre $-2,5$ & -3 ; c'est $-2,7$, en négligeant au-delà des dixièmes.

Je substitue $-2,7$ dans l'équation, au lieu de x ; je trouve pour résultat $-0,183$, c'est-à-dire, une quantité négative. Donc puisque $-2,5$, a donné un résultat positif, & que $-2,7$ en donne un négatif, la valeur de x , est entre $-2,5$ & $-2,7$; or ces deux nombres ne diffèrent que de 0,2 qui est plus petit que le dixième de chacun d'eux; donc la valeur de x est (en prenant un milieu entre deux) $-2,6$ à moins d'un dixième près.

Ayant ainsi trouvé un nombre qui ne diffère pas de x , d'un dixième de la valeur de cette même quantité, je suppose x égal à ce nombre plus une nouvelle inconnue z ; c'est-à-dire, ici, je suppose $x = -2,6 + z$, & je substitue cette quantité, au lieu de x , dans l'équation; mais comme z est tout au plus un dixième de la quantité 2,6; que par conséquent son carré sera tout au plus la centième partie du carré de celui-ci; son cube tout au plus la millième partie du cube de celui-ci; & ainsi de suite, je néglige dans cette substitution toutes les puissances de z au-dessus de la première; & afin de ne pas faire de calculs inutiles, je n'admets dans la formation du cube de $-2,6 + z$ (& des autres puissances s'il y en avoit), que les deux premiers termes que doit donner la règle donnée (149).

Pour substituer avec ordre, j'écris comme on le voit ici :

$$\begin{aligned} x^3 &= (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z \\ -5x &= -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

Réunissant donc, j'aurai pour le résultat de la substitution $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z - 5 \cdot (-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou, en faisant les opérations indiquées, & les réductions,

$$15,28z + 1,424 = 0; \text{ d'où je tire } z = -\frac{1,424}{15,28}, \text{ qui}$$

en réduisant en décimales, donne $z = -0,09$; quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à un chiffre significatif seulement. En général, il ne faut la pousser que jusqu'à autant de chiffres significatifs (y compris le premier qu'on trouve), qu'il y a de places entre celui-ci, & le premier chiffre de la première valeur approchée de x : ici entre 9 (qui est le premier chiffre significatif du quotient 0,09) & 2 (qui est le premier chiffre de 2,6) première valeur approchée de x , il n'y a qu'une place; c'est pourquoi je m'arrête au premier chiffre significatif 9.

La valeur de x , savoir $x = -2,6 + z$, devient donc $x = -2,6 - 0,09$, c'est-à-dire, $x = -2,69$.

Pour avoir cette valeur de x plus exactement, je suppose actuellement $x = -2,69 + z$;

$$\begin{aligned} \text{J'aurai donc } x^3 &= (-2,69 + z)^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 \cdot z \\ -5x &= -5(-2,69 + z) = -5(-2,69) - 5z \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

Et par conséquent, après les opérations faites, $-0,015109 + 16,7083z = 0$, d'où je tire $z = \frac{0,015109}{16,7083}$, qui revient à $z = 0,000904$.

La valeur de x , savoir $x = -2,69 + \epsilon$, devient donc
 $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Si l'on veut pousser plus loin, on fera $x = -2,689096 + \mu$, & on se conduira de la même manière.

Prenons, pour second exemple, l'équation.

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

En s'y prenant comme ci-dessus, on trouvera que la valeur de x approchée à moins d'un dixième près, est 2,3.

Je fais donc $x = 2,3 + \zeta$. J'aurai, en substituant, & négligeant ζ^2 , ζ^3 , &c.

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,3)^4 + 4(2,3)^3 \cdot \zeta \\ - 4x^3 &= - 4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 \zeta \\ - 3x &= - 3(2,3) - 3\zeta \\ + 27 &= + 27 \end{aligned}$$

Donc, toute réduction faite, $-0,5839 - 17,812\zeta = 0$,
 & par conséquent $\zeta = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$; je me borne
 aux centièmes, par la même raison que ci-dessus. La va-
 leur de x est donc $x = 2,3 - 0,03 = 2,27$.

Pour approcher davantage, je fais $x = 2,27 + \epsilon$, &
 substituant, j'aurai.

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,27)^4 + 4(2,27)^3 \epsilon \\ - 4x^3 &= - 4(2,27)^3 - 12(2,27)^2 \epsilon \\ - 3x &= - 3(2,27) - 3\epsilon \\ + 27 &= + 27 \end{aligned}$$

Donc, toute réduction faite, $-0,04595359 - 18,046468\epsilon$
 $= 0$; d'où l'on tire $\epsilon = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025$,
 & par conséquent $x = 2,2675$.

Réflexions sur la Méthode précédente.

227. La méthode que nous venons d'exposer, & qui est due à *Newton*, exige, comme on vient de le voir, que l'on trouve deux nombres qui substitués dans l'équation, donnent deux résultats dont l'un soit positif & l'autre négatif. Nous avons dit qu'il y auroit toujours une racine de l'équation qui seroit comprise entre les deux nombres qui ont donné ces deux résultats; & cela est facile à voir. Car si l'on suppose que la plus petite valeur de x soit représentée par a , & que celle qui est immédiatement plus grande, soit b , en sorte que $x - a$ & $x - b$ soient deux facteurs de l'équation, il est visible que si au lieu de x on substitue un nombre positif plus petit que a , $x - a$ devient négatif. Et si l'on substitue un nombre positif plus grand que a , mais plus petit que b , $x - a$ deviendra positif; & le produit des autres facteurs sera de même signe que dans le premier cas; donc puisqu'il n'y a que le facteur $x - a$ qui change de signe alors, le produit total changera sûrement de signe. On démontreroit la même chose, si le plus petit facteur, au lieu d'être $x - a$, étoit $x + a$, mais en substituant des nombres négatifs.

Mais ne peut-il pas arriver qu'il n'y ait aucune valeur réelle, soit positive, soit négative, qui substituée pour x , donne deux résultats de signe contraire?

Cela peut arriver dans trois cas; 1°. lorsque les racines sont égales deux à deux, quatre à quatre, &c.

2°. Lorsque toutes les racines sont imaginaires.

3°. Lorsqu'elles sont en partie imaginaires & en partie égales deux à deux.

Par exemple, une équation qui seroit formée de ces quatre facteurs $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, c'est-à-dire, l'équation $(x - a)^2 \times (x - b)^2 = 0$, ne change jamais de signe, quelque valeur qu'on mette pour x , soit positive, soit négative. En effet, soit que $x - a$ soit positif, soit qu'il soit négatif, son quarré est toujours positif. Il en est de même de $x - b$.

Quant au cas où toutes les racines sont imaginaires, il est évident qu'il n'y a aucuns nombres réels à substituer pour x qui puissent donner deux résultats de signe contraire; car si cela arrivoit, la valeur de x seroit donc entre ces deux nombres réels; elle seroit donc réelle; ce qui est contre la supposition.

Enfin le troisième cas suit immédiatement des deux que nous venons d'examiner.

Que doit-on donc faire alors, pour avoir les racines? C'est ce que nous allons examiner.

De la manière d'avoir les Racines égales des Équations.

228. Pour avoir les racines égales qu'une équation peut renfermer, multipliez chaque terme par l'exposant de x dans ce même terme, & diminuez cet exposant, d'une unité; vous aurez une nouvelle équation. Cherchez le plus grand commun diviseur entre cette dernière, & l'équation proposée, il sera composé des racines égales de celle-ci, mais élevées à une puissance moindre d'une unité.

Par exemple, l'équation

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 &= 0 \\ - 2bx^3 + 4abx^2 - 2ab^2x & \\ + b^2x^2 & \end{aligned}$$

est le produit de $(x - a)^2$ par $(x - b)^2$.

Si vous multipliez chaque terme par l'exposant de x , & si vous diminuez l'exposant, d'une unité, vous aurez, en faisant attention que l'exposant de x dans le dernier terme, est zéro.

$$4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x - 2a^2b = 0, \text{ équation dont}$$

$$- 6bx^2 + 8abx - 2ab^2$$

$$+ 2b^2x$$

le diviseur commun avec l'équation proposée, est $x^2 - ax + ab$,
 $- bx$

qui n'est autre chose que $(x - a)(x - b)$ dans lequel on voit les mêmes facteurs que dans $(x - a)^2 \times (x - b)^2$, avec cette différence seulement que dans ce commun diviseur, ils y sont à une puissance moindre d'une unité. Voici la démonstration de cette règle.

Nous avons vu (149) que

$$(x + b)^m = x^m + m \cdot x^{m-1}b + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^{m-2}b^2$$

$$+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3}b^3$$

Concevons que dans le second membre, on multiplie chaque terme par l'exposant de x , & qu'on diminue cet exposant d'une unité, on aura.

$$mx^{m-1} + m \cdot \overline{m-1} x^{m-2}b + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \overline{m-2} \cdot$$

$$x^{m-3}b^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \overline{m-3} \cdot x^{m-4}b^3, \&c.$$

Or cette quantité n'est autre chose que.

$$m(x^{m-1} + \overline{m-1} x^{m-2}b + \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{2} x^{m-3}b^2$$

$$+ \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} x^{m-4}b^3, \&c.$$

c'est-à-dire (149), qu'elle est précisément $m(x + b)^{m-1}$.

Concluons donc que lorsqu'on multiplie les termes qui composent la puissance m du binome $x + b$, chacun par l'exposant de x , dans ce terme, ce produit est précisément la puissance immédiatement inférieure, multipliée par l'exposant de la puissance actuelle. La règle est donc démontrée pour le cas où toutes les racines sont égales.

Supposons actuellement que l'on ait $(x + b)^m \times (x + d)^n$, en développant de même $(x + b)^m$ & $(x + d)^n$, & multipliant les deux résultats l'un par l'autre; si vous multipliez ensuite chaque terme, par l'exposant de x , vous trouverez de même par le calcul, que le résultat n'est autre chose que $m(x + b)^{m-1} \times (x + d)^n + n(x + b)^m \times (x + d)^{n-1}$, dont le commun diviseur avec $(x + b)^m \times (x + d)^n$ est $(x + b)^{m-1} \times (x + d)^{n-1}$ & ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs $x + b$, $x + d$, &c.

De la manière d'avoir les Racines imaginaires des Équations.

229. Quoique les racines imaginaires des équations soient susceptibles de bien des formes différentes, selon le degré de l'équation, néanmoins on peut les ramener toutes à cette forme, $x = a + b\sqrt{-1}$, a & b étant de quantités réelles positives ou négatives. La démonstration rigoureuse de cette proposition, nous mèneroit trop loin: on la trouvera dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1746, où M. Dalember, Auteur de cette démonstration, fait voir qu'en même temps qu'une des valeurs de x peut être représentée par $a + b\sqrt{-1}$, il y en a une autre qui doit être exprimée par $a - b\sqrt{-1}$; d'où il suit, 1°. qu'il n'y a

que les équations de degrés pairs qui puissent avoir toutes leurs racines imaginaires.

2°. Qu'une équation qui a toutes ses racines imaginaires, est décomposable en facteurs du second degré de cette forme $(x - a - b\sqrt{-1}) \times (x - a + b\sqrt{-1})$, c'est-à-dire, en facteurs réels du second degré; puisqu'en faisant la multiplication, on a $x^2 - 2ax + aa + bb$; quantité où il n'y a plus d'imaginaires.

Donc, lorsqu'une équation a toutes ses racines imaginaires, si l'on cherche à la décomposer en facteurs du second degré tels que $x^2 + gx + h$ [ce que l'on fera de la manière qui a été indiquée (223)], l'équation en h aura sûrement quelques racines réelles; donc on pourra toujours avoir ces racines, au moins par approximation. Donc dans quelque équation que ce soit, on peut toujours avoir les racines, soit réelles, soit imaginaires, au moins par approximation.

SECONDE SECTION,

DANS laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique & à la Géométrie.

230. **D**ANS le petit nombre d'applications que nous avons données dans le Section précédente, on a dû remarquer que lorsqu'une fois une question a été mise en équation, ce qui reste à faire pour parvenir à la résolution, est uniforme pour toutes les questions du même degré. Tout se réduit à dégager l'inconnue ou les inconnues; & cela se fait par des règles qui sont toujours les mêmes, quelque différentes que puissent être d'ailleurs les quantités que l'on a à considérer dans chaque question, & quelque différentes que soient elles-mêmes ces questions, pourvu qu'elles soient du même degré.

Ces règles dispensent de beaucoup de raisonnemens qu'on auroit à faire si l'on vouloit se passer du secours des équations; raisonnemens qui, indépendamment de leur nombre, feroient encore souvent par leur nature, au-dessus des efforts ordinaires de l'esprit.

Nous avons fait pressentir aussi, par quelques exemples,

exemples , combien il étoit avantageux de représenter par des signes généraux , chacune des quantités qui entrent dans une question , ainsi que les opérations que l'on a à faire sur elles ; mais indépendamment des avantages que nous avons vu devoir résulter de cette méthode , il en est encore un grand nombre d'autres que nous allons faire connoître en présentant les équations sous un point de vue plus étendu que nous ne l'avons fait jusqu'ici.

Lorsque l'on a représenté d'une manière générale chacune des quantités , soit connues , soit inconnues qui entrent dans une question , & que l'on a exprimé , par des équations , toutes les conditions qu'elle renferme , on peut alors abandonner totalement de vue la question , pour s'occuper uniquement de ces équations & de l'application des règles qui leur conviennent. Alors si l'on a bien présent à l'esprit ce que l'on est convenu d'entendre , soit par les signes , soit par la disposition des lettres , chaque équation devient , comme un livre , où l'on peut lire , avec plus de facilité , les différens rapports qui lient les quantités les unes aux autres. On peut , par différentes applications des règles exposées dans la première Section , donner à ces équations de nouvelles formes qui rendent encore ces rapports plus faciles à saisir. En un mot , on peut les considérer comme

le dépôt des propriétés de ces quantités , & des solutions générales d'un grand nombre de questions qu'on n'avoit point en vue , qu'on ne soupçonnoit pas même tenir de si près à la question principale.

En effet , puisque les règles qui servent à trouver les valeurs des inconnues , ont toutes pour objet de ramener chaque quantité inconnue à former seule le premier membre d'une équation dont le second seroit composé de toutes les autres quantités , & que ces règles sont évidemment applicables à chacune des quantités qui entrent dans ces équations , il est visible qu'on peut toujours , par ces mêmes règles , parvenir à avoir seule dans un membre , l'une quelconque des quantités qui entrent dans une équation , & n'avoir que les autres dans le second membre. Alors on est dans le même cas que si l'on avoit eu à résoudre la question où toutes ces dernières seroient connues , & celle-là , seule , inconnue. On voit donc qu'une même équation résout autant de questions différentes qu'elle renferme de quantités différentes. Rendons cela sensible , par des exemples.

Propriétés générales des progressions arithmétiques.

231. Nous avons vu (*Arith.* 206) , qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante

étoit composé du premier , plus autant de fois la différence commune , qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.

Si donc on représente par a la valeur numérique du premier terme ; par u celle du terme dont il s'agit ; par d , la différence commune , ou la raison de la progression ; & enfin par n , le nombre total des termes ; alors le nombre des termes qui précèdent le terme u , sera exprimé par $n - 1$; & la proposition que nous venons de citer pourra se traduire en langage algébrique , par cette équation ; $u = a + (n - 1) d$, qui résout la question où connoissant la raison d d'une progression , le nombre n des termes , & la valeur a du premier , on demanderoit quelle doit être la valeur du dernier u .

Mais puisqu'il entre quatre quantités dans cette équation , je dis qu'elle résout quatre questions générales. En effet ,

1°. Si l'on regarde a , comme l'inconnue & que l'on en cherche la valeur , suivant les règles de la première Section , on aura $a = u - (n - 1) d$, qui nous apprend que le premier terme d'une progression arithmétique croissante se trouve en retranchant du dernier u , la différence d prise $n - 1$ de fois , c'est-à-dire , la différence prise autant de fois moins une qu'il y a de termes en tout.

R 2

2°. Si l'on regarde n comme l'inconnue, l'équation $u = a + (n - 1) d$, qui n'est autre chose que $u = a + n d - d$, donne en transposant, $n d = u - a + d$, & en divisant, $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$, qui m'apprend que connoissant le premier terme a , le dernier u & la raison d , d'une progression arithmétique, je saurai combien il y a de termes, en retranchant le premier du dernier, divisant le reste par la raison d , & ajoutant une unité au quotient. Par exemple, si je fais que le premier terme d'une progression est 5, le dernier 37, & la différence 2; de 37 je retranche 5, ce qui me donne 32 qui étant divisé par la différence 2, donne 16 auquel ajoutant 1, j'ai 17 pour le nombre des termes de cette progression.

3°. Enfin, si je regarde d comme l'inconnue dans l'équation $u = a + (n - 1) d$, j'aurai, en transposant, $(n - 1) d = u - a$, & en divisant par $n - 1$, $d = \frac{u - a}{n - 1}$, qui m'apprend que pour connoître la différence qui doit régner dans une progression arithmétique dont le premier terme, le dernier & le nombre des termes sont connus, il faut retrancher le premier du dernier, & diviser le reste par le nombre des termes moins un. Cette règle revient à celle que nous avons donnée (*Arith.* 209) pour trouver un nombre déterminé de moyennes

proportionnelles entre deux quantités données. Nous avons dit qu'il falloit retrancher la plus petite de la plus grande, & diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité, ce qui est évidemment la même chose, puisque le nombre des moyens est moindre de deux unités que le nombre total des termes de la progression.

La seule équation $u = a + (n - 1) d$, nous donne donc la résolution de quatre questions générales; c'est-à-dire, nous met en état de résoudre celle-ci qui les comprend toutes quatre: De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes & la différence d'une progression arithmétique, trois quelconques étant connues, trouver la quatrième.

232. Toute autre propriété générale, énoncée aussi d'une manière générale, nous conduira par les mêmes moyens, à la résolution d'autant de questions différentes qu'il entrera de quantités dans l'énoncé de cette propriété.

Par exemple, c'est encore une propriété des progressions arithmétiques, que *pour avoir la somme de tous les termes de quelque progression arithmétique que ce soit, il faut ajouter le premier terme avec le dernier, & multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes.*

Ainsi, pour avoir la somme des cent premiers termes de la progression $\div 1. 3. 5. 7 \&c.$ dont le centième est 199 : au dernier 199 j'ajouterois le premier terme 1, & je multiplierois le résultat 200, par 50, qui est la moitié de 100, nombre des termes, ce qui me donne 10000, pour la somme des 100 premiers nombres impairs.

Nous allons démontrer cette propriété, dans un instant ; mais pour ne point perdre de vue notre objet, si en conservant les mêmes dénominations que ci-devant ; nous nommons, de plus, s la somme de tous les termes ; nous aurons pour la traduction algébrique de cette propriété $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Cette équation nous met en état de résoudre cette question générale qui en comprend quatre. *De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes, & la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, trois étant connues, trouver la quatrième.*

En effet, 1°. si l'on connoît a, u & n , l'équation donne immédiatement la valeur de s . 2°. Si l'on connoît a, u & s , pour avoir n , on chassera le diviseur 2, & l'on aura $2s = (a + u) \times n$ ou $(a + u) \times n = 2s$; & en divisant par $a + u$, $n = \frac{2s}{a + u}$ équation où n est connue, puisqu'on suppose

que l'on connoît les quantités a , u & s qui entrent dans sa valeur. 3°. & 4°. Si l'on connoît a , s & n , ou u , s & n , & que l'on veuille avoir u ou a , on reprendra l'équation $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$; chassant la fraction, on a $2s = (a + u) \times n$; divisant par n , il vient $a + u = \frac{2s}{n}$; d'où l'on tire $u = \frac{2s}{n} - a$, qui satisfait à la première question, & $a = \frac{2s}{n} - u$, qui satisfait à la seconde.

Démontrons maintenant la propriété que nous venons de supposer.

Il est évident que si nous continuons de représenter le premier terme par a , & la différence par d , nous pouvons représenter toute progression arithmétique croissante par la suivante $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$, &c. Concevons que, sous cette progression arithmétique, on fasse répondre terme pour terme, la même progression, mais dans un ordre renversé, on aura

$$\begin{array}{l} \div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d . \\ \div a + 6d . a + 5d . a + 4d . a + 3d . a + 2d . a + d . a . \end{array}$$

Comme ces deux progressions sont égales; il est évident que la somme des termes de l'une des deux, est la moitié des deux réunies; or si l'on y fait attention, on voit que les deux termes correspondans sont

& doivent toujours faire une même somme , & que cette somme est celle du premier & du dernier terme de la première progression , réunis ; donc la totalité des deux progressions se trouvera en ajoutant le premier & le dernier terme de l'une , & prenant ce résultat autant de fois qu'il y a de termes ; donc pour l'une seulement de ces deux progressions , il faudra ajouter le premier & le dernier , prendre ce résultat , seulement moitié autant de fois qu'il y a de termes , c'est-à-dire , le multiplier par la moitié du nombre des termes.

233. Les huit questions générales que nous venons de résoudre , tiennent donc à deux principes seulement , savoir , celui que nous avons énoncé (231) & celui que nous avons énoncé (232). Et puisque leur résolution se tire immédiatement des deux équations qui sont la traduction algébrique de ces deux énoncés , on voit comment , à l'aide de l'Algèbre , on peut faire découler d'une même source toutes les vérités qui en dépendent.

Quoique ces propriétés ne soient pas toutes également utiles , cependant comme elles sont simples , elles en sont d'autant plus propres à faire bien sentir l'usage des équations. C'est pourquoi nous continuerons d'exposer cet usage , en les prenant encore pour exemple.

Dans ce que nous venons d'exposer, nous n'avons considéré qu'une seule équation à la fois. Mais si deux ou un plus grand nombre d'équations qui expriment des propriétés différentes de quelques quantités, se trouvent avoir quelques-unes de ces quantités qui leur soient communes, alors on peut encore en dériver un très-grand nombre d'autres propriétés, & cela avec une très-grande facilité. Par exemple, les deux équations fondamentales des progressions arithmétiques, savoir $u = a + (n - 1)d$ & $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ont trois quantités communes entre elles, savoir a , u & n . Si l'on prend successivement dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une quelconque de ces trois quantités, & si l'on égale ensuite ces deux valeurs, on aura une nouvelle équation dans laquelle cette quantité ne fera plus, & qui exprimera le rapport que les quatre autres ont entre elles, indépendamment de celle-là. Par exemple, si je prends dans chaque équation la valeur de a , j'aurai ces deux valeurs $a = u - (n - 1)d$, & $a = \frac{2s}{n} - u$; donc en égalant, j'aurai $u - (n - 1)d = \frac{2s}{n} - u$, équation de laquelle, en considérant successivement u , n , d & s comme inconnues, je tirerai comme ci-dessus, quatre nouvelles propriétés générales des progressions arithmétiques. Par exemple, en regardant s comme

inconnue, je tirerai $s = \frac{2 n u - n \cdot (n - 1) d}{2}$ qui me donne le moyen de connoître la somme d'une progression arithmétique, par le moyen du dernier terme, de la différence, & du nombre des termes, puisqu'il n'entre que ces trois quantités & des nombres connus, dans le second membre.

Si au lieu de chasser ou d'éliminer a , nous eussions éliminé u , ou n , nous aurions eu, de même, pour chaque élimination, une nouvelle équation qui auroit renfermé quatre des cinq quantités a, u, n, d, s : & en considérant successivement chacune de ces quatre quantités, comme inconnues, on tireroit de chaque nouvelle équation quatre nouvelles formules, qui sont autant d'expressions différentes des quantités a, u, n, d, s ; expressions dont chacune a son utilité particulière, selon que dans la question qu'on proposera relativement aux progressions arithmétiques, on connoitra telles ou telles de ces quantités. Par exemple, si l'on me demandoit la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, dont on me feroit connoître, le premier, la différence, & le nombre des termes; alors, comme le dernier terme m'est inconnu, j'éliminerois u , & j'aurois une équation qui ne renfermant plus que a, n, d , & s , me feroit aisément connoître s .

Concluons de-là que les deux équations $u = a +$

$(n - 1) d \& s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ donnent la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions arithmétiques, lorsqu'on y connaît, immédiatement, trois des cinq quantités a, u, n, d, s .

Donnons ici quelques applications des progressions arithmétiques.

234. Supposons qu'on demande combien la base d'une pile triangulaire de boulets, dont le côté seroit de 6, contiendrait de ces boulets.

Il est facile de voir 1°. que le nombre des boulets de chaque bande parallèle au côté qui porte sur la terre & qui en contient 6, &c. (*fig. 2*), va en diminuant continuellement de 1 & se réduit enfin à 1. 2°. Que le nombre des bandes est 6. Donc il s'agit de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier est 1, le dernier 6, & le nombre des termes 6. J'ajoute donc le premier 1 avec le dernier 6, & je multiplie le résultat 7, par 3 moitié du nombre des termes, ce qui me donne 21 pour le nombre des boulets de la base de la pile.

235. Nous avons vu, en Géométrie, que pour avoir la surface d'un trapèze, il falloit ajouter les deux côtés parallèles, & multiplier la moitié de leur somme, par la hauteur de ce trapèze. On peut démontrer cette même proposition, par le principe que nous venons de donner pour sommer une progression arithmétique. En effet, on peut se représenter le trapèze $ABDC$ (*fig. 3*) comme composé d'un nombre infini de trapèzes infiniment petits tels que $bcih$,

$cdki$. Or il est facile de voir qu'en supposant tous ces petits trapèzes de même hauteur, chacun diffère de son voisin toujours d'une même quantité, savoir, du petit parallélogramme $cefg$, en tirant ce & bf parallèles à kk ; car $gfki$ est égal à $bgih$, & cde est égal à bcg , en sorte que le trapèze $cdki$, a de plus que le trapèze $bcih$, le petit parallélogramme $cefg$, qui sera toujours de même grandeur, tant qu'on supposera ces trapèzes de même hauteur. Cela étant, tous ces trapèzes forment donc une progression arithmétique dont le premier terme est le trapèze contigu à AB , & le dernier est le trapèze contigu à CD ; donc pour avoir la totalité de ces trapèzes, ou la surface du trapèze $ABDC$, il faut prendre les deux petits trapèzes extrêmes & les multiplier par la moitié du nombre de tous les trapèzes; mais comme on les suppose infiniment petits, on peut prendre à la place des deux trapèzes extrêmes, les deux lignes AB & CD ; & pour le nombre des trapèzes, on peut prendre la hauteur IH ; il faut donc multiplier la somme des deux lignes AB & CD , par la moitié de la hauteur IH , ou la moitié de la somme des deux lignes AB & CD , par la hauteur IH . D'où l'on voit que si AB est zéro, auquel cas le trapèze dégénère en triangle, il faudra multiplier la base de ce triangle, par la moitié de sa hauteur, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré en Géométrie.

De la sommation des puissances des termes d'une progression Arithmétique quelconque.

236. On vient de voir que le principe de la sommation des termes d'une progression arithmétique peut avoir quelques applications en Géométrie. Il en a

encore dans plusieurs autres rencontres. Il est, par exemple, la base de la sommation des quarrés, des cubes, &c. des termes d'une progression arithmétique; & la sommation de ces puissances a aussi son utilité. Nous allons nous en occuper un moment. Mais auparavant, il est à propos de faire observer que quand on se propose de sommer une suite de quantités qui croissent ou qui décroissent suivant une loi connue, l'objet est de déterminer la somme de ces quantités par la connoissance de quelques-unes d'entre elles, de leur nombre, & de la quantité qui marque la loi de leur augmentation ou de leur diminution.

Pour résoudre cette question, on peut toujours, comme pour toute autre, faire usage du principe que nous avons donné (67). Mais comme ce principe suppose que si l'on connoissoit la quantité cherchée, on seroit en état de la vérifier, ce qui ne peut se faire sans connoître au moins quelques-unes de ses propriétés, essayons donc de trouver les propriétés des suites des quarrés, des cubes, &c., des nombres en progression arithmétique.

Soient donc a, b, c, d , &c. plusieurs nombres en progression arithmétique dont la difference soit r . On aura 1°. $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$,
 $e = d + r$,

2°. En quarrant , on aura

$$b^2 = a^2 + 2 ar + r^2,$$

$$c^2 = b^2 + 2 br + r^2,$$

$$d^2 = c^2 + 2 cr + r^2,$$

$$e^2 = d^2 + 2 dr + r^2.$$

3°. En cubant , on aura

$$b^3 = a^3 + 3 a^2 r + 3 ar^2 + r^3,$$

$$c^3 = b^3 + 3 b^2 r + 3 br^2 + r^3,$$

$$d^3 = c^3 + 3 c^2 r + 3 cr^2 + r^3,$$

$$e^3 = d^3 + 3 d^2 r + 3 dr^2 + r^3.$$

Si l'on ajoute , maintenant , les équations des quarrés , entre elles ; & celles des cubes aussi entre elles , on aura , après avoir effacé les termes égaux & semblables qui se trouveront dans différens membres. 1°. $e^2 = a^2 + 2 ar + 2 br + 2 cr + 2 dr + 4r^2$ ou $e^2 = a^2 + 2 r (a + b + c + d) + 4r^2$; & l'on voit qu'en général si le nombre des quantités a, b, c, d , &c. étoit marqué par n , que la dernière fût marquée par u , & la somme de toutes ces mêmes quantités , par s' , on auroit $u^2 = a^2 + 2 r (s' - u) + (n - 1) r^2$, car $2 r$ est multiplié par toutes les quantités a, b, c , &c. excepté la dernière , & r^2 est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'équations , c'est-à-dire , autant de fois moins une qu'il y a de quantités a, b, c , &c. Or cette équation renfermant s' , il est aisé d'en tirer la valeur de

cette quantité, & par conséquent, l'expression de la somme de tous les termes d'une progression arithmétique. Cette valeur de s' est $s' = \frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2r} + u$.

2°. Si l'on ajoute de même les équations des cubes, on aura, après avoir effacé les quantités semblables & égales qui se trouveront dans différens membres $e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$.

C'est-à-dire, $e^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2(a + b + c + d) + 4r^3$, où l'on voit que la quantité qui multiplie $3r$, est la somme de tous les quarrés excepté le dernier; que la quantité qui multiplie $3r^2$, est la somme de toutes les quantités excepté la dernière, & qu'enfin le cube r^3 a été ajouté à lui-même autant de fois qu'il y avoit d'équations, c'est-à-dire, autant de fois moins une qu'il y a de quantités; par conséquent, en général, & en nommant s'' , la somme des quarrés, u le dernier terme, on aura $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r^2(s' - u) + (n-1)r^3$.

Donc, connoissant le premier terme, le dernier, la différence r & le nombre des termes, on pourra avoir, par le moyen de cette équation, la valeur de s'' , c'est-à-dire, de la somme des quarrés; car la quantité s' a été déterminée ci-dessus. Si donc on

substitue pour s' , sa valeur, on aura $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r\left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1) \cdot r^2}{2}\right) + (n-1) \cdot r^3$, ou $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' - 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3 \cdot (n-1) \cdot r^3 + 2 \cdot (n-1) \cdot r^3$, qui, après les opérations ordinaires, donne

$$s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1) \cdot r^3}{6r}.$$

Si l'on prend de même les quatrièmes puissances des équations $b = a + r$, $c = b + r$ &c., qu'on les ajoute & qu'on les traite de la même manière, on trouvera de même la somme des cubes. On s'y prendra de même pour trouver la somme des puissances plus élevées.

237. Donnons maintenant quelques applications de la somme des quarrés.

Si l'on suppose que la progression arithmétique dont il s'agit, soit la suite naturelle des nombres, à commencer par l'unité, c'est-à-dire, soit 1, 2, 3, &c.

Alors on aura $a = 1$, $r = 1$ & $u = n$; car, en général, u est $= a + \overline{n-1} \cdot r$, qui devient ici $u = 1 + n - 1 = n$. La valeur de s'' deviendra donc $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, c'est-à-dire, $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n \cdot \frac{(2n^2 + 3n + 1)}{6} = n \cdot \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$

Supposons

Supposons maintenant qu'on veuille savoir, combien il y a de boulets dans une pile quarrée dont on connoît le nombre des boulets d'un des côtés de la base. Il est évident que cette pile est composée de rangs parallèles à la base, qui sont tous des quarrés dont le côté va continuellement en diminuant de 1 à compter de la base, ou en augmentant de 1 à compter du sommet. La totalité est donc la somme des quarrés de la suite naturelle des nombres, prise jusqu'au nombre n qui marque le nombre des boulets d'un des côtés de la base; cette totalité est donc exprimée par $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$; c'est-à-dire, que pour

l'avoir, il faut suivre cette règle.

Au nombre des boulets d'un des côtés de la base & à son double, ajoutez un; multipliez les deux résultats l'un par l'autre, & leur produit par le nombre même des boulets; & prenez le sixième de ce dernier produit. Par exemple, si la pile quadrangulaire a 6 boulets de côté; à 6 & à son double 12, j'ajoute 1, ce qui me donne 7 & 13, qui multipliés l'un par l'autre font 91; je multiplie celui-ci par 6, ce qui fait 546, dont le sixième 91 est le nombre des boulets de la pile.

Lorsque la pile n'a point pour base un quarré, mais un parallélogramme, il faut la concevoir partagée en deux parties (*fig. 4*), dont l'une est la pile quadrangulaire dont nous venons de parler, & dont l'autre est un prisme dont on évaluera la totalité des boulets en multipliant le nombre des boulets contenus dans le triangle FBG par le nombre des boulets de l'arrête BC . Quant au nombre de boulets contenus dans le triangle BGF , on l'aura en multipliant la moitié du nombre des boulets du côté FG par ce nombre augmenté de 1.

238. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la
Marine. Algèbre. S

solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il falloit multiplier la surface de la base, par le tiers de la hauteur. On peut le démontrer aussi par la formule de la somme des quarrés. Mais auparavant, il faut remarquer que si dans la formule $s'' = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$, on suppose que le nombre n des termes est infini, cette formule se réduit à $s'' = \frac{n^3}{3}$, ou à cause que $u = n$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, $s'' = \frac{u^3 n}{3} = u^2 \cdot \frac{n}{3}$. En effet supposer que n est infini, c'est supposer qu'il ne peut plus être augmenté par aucune quantité finie: ainsi pour que le calcul exprime la supposition que l'on fait, que n est infini, il faut nécessairement regarder $n + 1$ & n , comme étant la même chose, & $2n + 1$ & $2n$ comme étant aussi égaux entre eux, alors la formule $s'' = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$ se change en $s'' = \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}$, ou $s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}$, en mettant pour n la valeur u , dans n^2 .

Cela posé, nous avons démontré (*Géom.* 202), qu'en concevant une pyramide comme composée de tranches parallèles à la base, ces tranches étoient entre elles, comme les quarrés de leurs distances St au sommet (*fig.* 5); donc en concevant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, les distances suivront la progression naturelle des nombres, & les tranches suivront celle de leurs quarrés; donc la somme des tranches se trouvera de la même manière que celle des quarrés; or la formule $s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}$, fait voir qu'il faut multiplier le dernier des quarrés, par le tiers de leur nombre; il faut donc, pour avoir la somme des

tranches, multiplier la dernière, c'est-à-dire, la base, par le tiers du nombre des tranches, c'est-à-dire, par le tiers de la hauteur.

239. Si l'on veut avoir la formule générale pour la sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque, il faut remarquer qu'en général on aura.

$$e^m = d^m + m d^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} d^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} d^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$d^m = c^m + m c^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} c^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} c^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$c^m = b^m + m b^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} b^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} b^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$b^m = a^m + m \cdot a^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} r^3 + \&c.$$

& par conséquent en ajoutant, réduisant & représentant par $\int t^{m-1}$, $\int t^{m-2}$, $\int t^{m-3}$, &c., la somme des puissances $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c., de tous les termes, & par u le dernier terme, on aura en général

$$u^m = a^m + m r (\int t^{m-1} - u^{m-1}) + m \cdot \frac{m-1}{2} r^2 (\int t^{m-2} - u^{m-2}) + \&c.$$

d'où l'on voit qu'en supposant successivement, $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, &c., on aura les formules de la sommation de toutes les puissances. Car en supposant $m=1$, on a $u = a + r (\int t^0 - u^0)$; or $\int t^0 = \int 1$, c'est-à-dire, la somme d'autant d'unités qu'il y a de termes, & $u^0 = 1$. En sorte qu'au lieu de $\int t^0 - u^0$, on peut prendre $n-1$. En supposant $m=2$, on a $u^2 = a^2 + 2r (\int t - u) + r^2 (\int t^0 - u^0)$, qui donnera $\int t$ puisqu'on connoît la valeur de $\int t^0$. Supposant $m=3$, on aura $u^3 = a^3 + 3r (\int t^2 - u^2) + 3r^2 (\int t - u) + r^3 (\int t^0 - u^0)$, qui donnera $\int t^2$, puisqu'en connoît $\int t$ & $\int t^0$. Enfin, si l'on suppose $m=4$, on aura $u^4 = a^4 + 4r (\int t^3 - u^3) + 6r^2 (\int t^2 - u^2) + 4r^3 (\int t - u) + r^4 (\int t^0 - u^0)$ qui donnera $\int t^3$, puisqu'on connoît $\int t^2$, $\int t$ & $\int t^0$, & ainsi de suite à l'infini.

240. Lorsqu'une fois on fait trouver la somme des puissances de plusieurs nombres en progression arithmétique, il est fort aisé de trouver celle d'une infinité d'autres espèces de progressions. Par exemple, si ayant une progression arithmétique, telle que $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19$ &c., on conçoit qu'on ajoute successivement les termes, on formera la suite 3, 10, 21, 36, 55, &c. que l'on peut sommer. Et si l'on ajoute de même les termes de celle-ci, on aura la suite 3, 13, 34, 70, 125, &c. qu'on peut pareillement sommer; il en sera de même des termes de celle-ci, ajoutés de la même manière, & ainsi à l'infini.

En effet, la somme des termes de la progression arithmétique, est $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ou, en mettant pour u sa valeur $u = a + r \cdot (n - 1)$, $s = [(2a + r \cdot (n - 1))] \times \frac{n}{2}$. Cette valeur de s exprime donc un terme quelconque de la seconde suite. Donc pour avoir la somme des termes de la seconde suite, il faut sommer la suite des quantités que donneroit $[(2a + r \cdot (n - 1))] \cdot \frac{n}{2}$ en mettant successivement pour n tous les nombres de la progression naturelle 1, 2, 3, &c. Or cette quantité revient à $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, dans laquelle a & r restant toujours les mêmes, quelque valeur qu'on donne à n , il est clair que pour sommer toutes les quantités représentées par an , il suffit de sommer les quantités représentées par n , & multiplier cette somme par a ; or la somme des quantités représentées par n , est la somme de la progression arithmétique des nombres naturels. Le raisonnement est le même pour $\frac{r}{2} n$. A l'égard de $\frac{r}{2} n^2$, puisque r reste le même, quelque nombre que l'on substitue pour n , on sommerá donc toutes les quantités représentées par n^2 ;

c'est-à-dire , qu'on prendra la somme des quarrés des nombres naturels , & on la multipliera par $\frac{r}{2}$. Ainsi pour la somme des quantités an , on aura $a \cdot (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$; pour celles des quantités $\frac{r}{2}n$, on aura $\frac{r}{2} \cdot (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$; & pour celles des quantités $\frac{r}{2}n^2$, on aura $\frac{r}{2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$; enforte que la somme des quantités $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, ou la somme des termes de la seconde suite , sera $a \cdot (n + 1) \cdot \frac{n}{2} + \frac{r}{2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{r}{2} \cdot (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$ qui se réduit à $a \cdot (n + 1) \cdot \frac{n}{2} + r \cdot \frac{(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)}{6}$; & puisque chaque terme de la troisième suite , est la somme des termes de la seconde , on sommerá cette troisième en sommant les différentes parties de ce dernier résultat , qui n'exigera encore que des sommations des puissances de la suite naturelle des nombres , & ainsi à l'infini. Si l'on suppose $a = 1$, & $r = 1$, c'est-à-dire , si la progression primitive est la suite des nombres naturels , les progressions dont il s'agit actuellement , deviennent alors ce qu'on appelle les *nombres figurés*. C'est par cette dernière formule qu'on peut trouver le nombre des boulets d'une pile triangulaire : comme on a , dans ce cas , $a = 1$, & $r = 1$, elle se réduit à $n \cdot \frac{n + 1}{2} \cdot \frac{n + 2}{3}$.

On peut de même sommer les suites que l'on formeroit en ajoutant la suite des quarrés , ou la suite des cubes , &c. de cette même manière. En un mot , on peut sommer par ces mêmes moyens , toute suite de quantités , dont un terme quelconque sera exprimé par tant de puissances parfaites que l'on voudra d'un même nombre n , ces puissances étant d'ailleurs multipliées par tels nombres connus que l'on voudra.

*Propriétés & usages des Progressions
géométriques.*

241. On peut aussi trouver la somme des termes d'une progression géométrique, par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour sommer les puissances des termes d'une progression arithmétique.

Supposons que $a, b; c, d, e, \&c.$ soient les termes consécutifs d'une progression géométrique croissante, dont la raison soit q . Puisque chaque terme contient q de fois celui qui le précède, on aura les équations suivantes $b = aq, c = bq, d = cq, e = dq, \&c.$; donc ajoutant ces équations, on aura $b + c + d + e = (a + b + c + d)q$, où l'on voit qu'en général, le premier membre sera toujours la somme de tous les termes excepté le premier; & le second, sera toujours la raison q multipliée par la somme de tous les termes excepté le dernier. Donc si l'on appelle s la somme de tous les termes, & u le dernier, cette équation se changera en $s - a = (s - u)q$ ou $s - a = qs - qu$, d'où l'on tire $qu - a = qs - s = (q - 1)s$; & par conséquent $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, formule par laquelle, connoissant le premier terme a , le dernier u , & la raison q , on aura la somme s de tous les termes.

Cette même formule peut servir aussi pour les progressions décroissantes , puisque la progression décroissante prise dans un ordre renversé , est une progression croissante ; il n'y aura de changement à faire que celui de dire *dernier terme* , au lieu de *premier* , & *premier* , au lieu de *dernier*.

Si la progression décroissante s'étendoit à l'infini , la somme , s se réduiroit alors à $s = \frac{q^u}{q-1}$, u marquant le premier terme. En effet , pour exprimer que la progression s'étend à l'infini , il faut introduire dans le calcul , ce que cette supposition renferme , savoir que le dernier terme est infiniment petit ; or le moyen d'exprimer cette dernière condition , c'est de le supposer nul à l'égard du terme qu ; car si on le laissoit subsister , ce seroit supposer qu'il peut encore diminuer qu , ce qui est contre la première supposition.

On voit donc que *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique , il faut multiplier le plus grand terme , par la raison (*) de la progression , & ayant retranché du produit , le plus petit terme de cette même progression , diviser le reste par la raison diminuée*

(*) Par *la raison* , nous entendons , en général , le nombre de fois qu'un terme de la progression contient celui qui est immé-

diatement plus petit , en sorte que cet énoncé convient à la progression décroissante comme à la progression croissante.

d'une unité ; en sorte que , lorsque la progression est décroissante à l'infini , cela se réduit à multiplier le plus grand terme par la raison , & diviser ensuite par la raison diminuée d'une unité. Ainsi la somme des termes de cette progression continuée à l'infini

$\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}, \&c.$ est $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2-1}$ ou 1 ; il en est

de même de la somme des termes de celle - ci

$\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81} \&c.$ dont la raison , en considérant

cette progression comme croissante , est 3 , puisque $\frac{2}{3}$

divisé par $\frac{2}{9}$ donne 3. En effet , la somme des termes

de cette progression est , $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3-1}$, qui se réduit à 1. En

général toute progression géométrique décroissante à

l'infini dont chaque terme a pour numérateur const-

ant , un nombre moindre d'une unité que le déno-

minateur du premier terme , vaut 1. Car cette pro-

gression est en général $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} :$

$\frac{n}{(n+1)^4}, \&c.$ dont la somme est $\frac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$, ou

$\frac{n}{n}$, c'est-à-dire , 1.

Si cette conclusion paroît surprenante à quelques lecteurs, ils doivent faire attention que si après avoir pris , par exemple , les $\frac{2}{3}$ de la ligne AB (fig. 6) que je suppose de 1 pied , on prend ensuite Cd , c'est-à-dire , les deux tiers de la partie restante CB , puis les deux tiers de la partie restante dB , puis les deux tiers de la partie restante eB , & ainsi à l'infini , on n'aura jamais absorbé plus que la ligne AB .

La même chose aura lieu si l'on prend d'abord les trois quarts de AB , puis les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste, & ainsi à l'infini. Or c'est ce qu'exprime la progression $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$, puisque $\frac{2}{9}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{27}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{9}$ & ainsi de suite.

242. Nous avons vu (*Arith.* 212) qu'un terme quelconque d'une progression géométrique étoit composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit. Donc si l'on nomme a , le premier terme, u un terme quelconque, q la raison, & n le nombre des termes, on aura $u = aq^{n-1}$: & comme il entre quatre quantités dans cette équation, on peut en tirer quatre formules, qui serviront à résoudre cette question générale ; Trois de ces quatre choses étant données, le premier terme, le dernier, la raison, & le nombre des termes d'une progression géométrique, trouver la quatrième. Car 1°. l'équation donne immédiatement la valeur de u . 2°. On trouvera facilement que celle de a est $a = \frac{u}{q^{n-1}}$: à l'égard de celle de q , on trouvera par ce qui a été dit (171), $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Sur quoi nous remarquerons que cette dernière équation renferme la règle que nous avons donnée en Arithmétique pour inférer plusieurs moyens proportionnels entre deux quantités données. Ces quantités sont ici a & u ; mais pour avoir la raison q

qui doit régner dans la progression, on voit ici qu'il faut diviser la plus grande u , par la plus petite a , & tirer la racine du degré $n - 1$, du quotient $\frac{u}{a}$; or n étant le nombre total des termes, $n - 1$ est plus grand d'une unité que le nombre des moyens; ce qui s'accorde avec la règle citée.

Quant à la manière d'avoir n , dans l'équation $u = aq^{n-1}$, l'Algèbre ne fournit pas de moyens directs; mais on peut la résoudre facilement, quoiqu'indirectement, en employant les logarithmes. Nous avons vu (*Arith.* 229) que pour élever à une puissance par le moyen des logarithmes, il falloit multiplier le logarithme de la quantité, par l'exposant de cette puissance. Ainsi en représentant par L , les mots *Logarithme de*, on pourra, au lieu de La^2 , prendre $2La$; au lieu de La^3 , prendre $3La$; au lieu de La^n , prendre nLa . Donc, en se rappelant que pour multiplier par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes, & qu'au contraire pour diviser, il faut retrancher le log. du diviseur, du log. du dividende, on aura dans l'équation $u = aq^{n-1}$, $Lu = La + Lq^{n-1}$, ou $Lu = La + (n-1)Lq$; donc en transposant, $(n-1)Lq = Lu - La$, & par conséquent, en divisant par Lq , $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, & enfin $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$.

Pour donner quelque application de ceci, supposons qu'on ait placé au denier 20 une somme de 60000 livres, à condition que les intérêts que cette somme produira chaque année, soient traités comme un nouveau fonds qui produira également intérêt, & ainsi d'année en année, jusqu'à ce que le fonds soit monté à 1000000 livres. On demande combien on doit attendre pour toucher cette dernière somme.

Puisque l'intérêt est ici $\frac{2}{10}$ du fonds de l'année précédente, au bout d'une année quelconque le fonds sera égal au fonds de l'année précédente plus la vingtième partie de ce même dernier fonds; ainsi, si l'on représente par a, b, c, d, e les fonds successifs d'année en année, on aura $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$, c'est-à-dire, $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c (1 + \frac{1}{20})$, $e = d (1 + \frac{1}{20})$; on voit donc que chaque fonds contient toujours celui qui le précède, le même nombre de fois marqué par $1 + \frac{1}{20}$ ou $\frac{21}{20}$. La suite de ces fonds forme donc une progression géométrique dont le premier terme a est 60000 livres; le dernier u , est 1000000 livres; la raison q , est $\frac{21}{20}$, & le nombre des termes est inconnu. On le trouvera donc en substituant dans la formule $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$, au lieu de a, u & q ,

leurs valeurs, ce qui donnera $n = \frac{L_{1000000} - L_{60000}}{L_{\frac{21}{20}}} + 1$,

ou (parce que $L_{\frac{21}{20}} = L_{21} - L_{20}$).

$n = \frac{L_{1000000} - L_{60000}}{L_{21} - L_{20}} + 1$; or, par les Tables, on

trouve $L_{1000000} = 6,0000000$; $L_{60000} = 4,7781513$;

$L_{21} = 1,3222193$, $L_{20} = 1,3010300$; donc.

$n = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{1,3222193 - 1,3010300} + 1 = \frac{1,2218487}{0,0211893} + 1 =$

57,7 + 1 à peu près ; c'est-à-dire , que le fonds de 60000 fera monté à 1000000 liv. au bout de 58 ans 8 mois $\frac{1}{2}$, à peu près.

Puisque (*Arithm.* 230) pour extraire , par le moyen des logarithmes , une racine d'un degré proposé , il faut diviser le logarithme de la quantité , par l'exposant ; on peut , par le moyen des logarithmes , résoudre facilement en nombres

l'équation $q = \sqrt[n]{\frac{u}{a}}$; car on aura $Lq = \frac{L\frac{u}{a}}{n-1} = \frac{Lu - La}{n-1}$. Si l'on veut appliquer ceci à un exemple , il n'y a qu'à chercher quel devoit être dans le précédent , l'intérêt , pour qu'en 58 ans & $\frac{7}{10}$, le fonds de 60000 liv. montât à 1000000 liv. On a ici $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 58,7$: en employant les logarithmes des Tables , on trouvera $Lq = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7}$ qui donne $Lq = 0,0211757$; ce logarithme répond dans les Tables , à 1,0500 à très-peu près ; & ce dernier nombre réduit en vingtièmes , donne 21, d'où l'on conclura que l'intérêt est à très-peu près $\frac{1}{10}$.

On voit aussi par-là , comment on peut facilement inférer par le moyen des logarithmes , plusieurs moyens proportionnels géométriques , entre deux nombres donnés.

243. L'équation $s = \frac{q^n - a}{q - 1}$, donnera aussi quatre équations qui serviront à résoudre ce problème général , trois de ces quatre choses , la somme , la raison , le premier , & le dernier terme d'une progression géométrique , étant données , trouver la

quatrième. Cela est trop facile, à présent, pour nous y arrêter.

Enfin si l'une des deux équations $s = \frac{q^n - a}{q - 1}$ & $u = a q^{n-1}$, on tire la valeur d'une même quantité a , ou q , ou u , &c., & qu'on la substitue dans l'autre, on aura les autres équations qui peuvent servir à résoudre la question suivante, encore plus générale; de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la raison, la somme, & le nombre des termes d'une progression géométrique, trois étant données, trouver chacune des deux autres.

De la sommation des suites récurrentes.

244. On appelle suites *récurrentes*, celles dont un terme quelconque se forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés ou divisés par des nombres déterminés, positifs ou négatifs. Par exemple, la suite 2, 3, 19, 101, 543, &c., est une suite récurrente, parce que chaque terme est formé des deux précédens, en multipliant le premier par 2, le second par 5, & ajoutant les deux produits; 543 est $19 \times 2 + 101 \times 5$; de même, 101 est $3 \times 2 + 19 \times 5$.

On peut sommer ces suites d'une manière analogue à celle que nous avons employée ci-dessus; il suffira d'en donner un exemple, sur les suites récurrentes dont la loi ne dépend que de deux quantités, comme celle que nous venons d'apporter pour exemple,

Soient donc $a, b, c, d, e, f, \&c.$ plusieurs termes formés par cette loi, que chacun soit composé des deux précédens dont le premier est multiplié par un nombre connu m , & le second par un nombre connu p ; on aura donc cette suite d'équations: $c = ma + pb, d = mb + pc, e = mc + pd, f = md + pe, \&c.$ Donc en ajoutant cette suite d'équations, on aura $c + d + e + f +, \&c. = m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$; or le premier membre est la somme de tous les termes, excepté les deux premiers: le multiplicateur de m , dans le second membre, est la somme de tous les termes, excepté les deux derniers; & enfin le multiplicateur de p , est la somme de tous les termes, excepté le premier & le dernier; donc en appelant s , cette somme, on aura $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f)$, d'où l'on tire $s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$, qui donnera la somme, lorsqu'on connoîtra les deux premiers & les deux derniers, & de plus les quantités m & p .

On peut y faire entrer le nombre des termes; il faut pour cela, chercher l'expression générale d'un terme quelconque, par le moyen des quantités a, b, m, p & du nombre n des termes; mais cette recherche, pour toutes les espèces de séries récurrentes, nous mèneroit trop loin.

De la Construction géométrique des Quantités algébriques.

245. Les lignes, les surfaces & les solides étant des quantités, on peut faire sur chacune de ces trois espèces d'étendue, les mêmes opérations qu'on fait sur les nombres & sur les quantités algébriques.

Mais les résultats des ces opérations peuvent être évalués de deux manières principales, ou en nombres, ou en lignes. La première manière supposant que chacune des quantités données est exprimée en nombres, ne peut avoir à présent aucune difficulté: il ne s'agit que de substituer à la place des lettres, les quantités numériques qu'elles représentent, & faire les opérations que la disposition des signes & des lettres indique.

Quant à la manière d'évaluer en lignes les résultats des solutions que l'Algèbre a fournies, elle est fondée sur la connoissance de ce que signifient certaines expressions fondamentales, auxquelles on rapporte ensuite toutes les autres. Nous allons faire connoître les premières, & nous ferons voir ensuite comment on y rapporte les autres: c'est-là ce qu'on appelle *construire* les quantités algébriques, ou les problèmes qui ont conduit à ces quantités.

246. Si l'on avoit à construire une quantité telle que $\frac{ab}{c}$, dans laquelle a , b , c marquent des lignes connues: on tireroit (*fig. 7*) deux lignes indéfinies AZ , AX faisant entre elles un angle quelconque. Sur l'une AX de ces lignes, on prendroit une partie AB égale à la ligne qu'on a représentée par c , puis une partie AD , égale à l'une ou à l'autre des deux lignes a & b , à a , par exemple; ensuite sur la seconde AZ , on prendroit une partie AC égale à la ligne b . Ayant joint les extrémités B & C de la première

& de la troisième, par la ligne BC , on mèneroit par l'extrémité D de la seconde, la ligne DE parallèle à BC ; elle détermineroit sur AZ la partie AE pour la valeur de $\frac{ab}{c}$; car (Géom. 102) les parallèles DE & BC donnent cette proportion $AB : AD :: AC : AE$, c'est-à-dire, $c : a :: b : AE$; donc (Arith. 179) $AE = \frac{ab}{c}$. C'est-à-dire, qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle, aux trois lignes données c , a , b . Et puisque (Géom. 120) nous avons donné deux manières de trouver cette quatrième proportionnelle, on peut employer indifféremment l'une ou l'autre pour construire $\frac{ab}{c}$.

On voit donc que si l'on avoit à construire $\frac{aa}{c}$, ce cas rentreroit dans le précédent, puisqu'alors la ligne b est égale à a .

Si l'on avoit à construire $\frac{ab + bd}{c + d}$, on remarqueroit que cette quantité est la même que $\frac{(a + d) \times b}{c + d}$; regardant donc $a + d$ comme une seule ligne, représentée par m , & $c + d$ aussi comme une seule ligne n , on auroit $\frac{mb}{n}$ à construire, ce qui se rapporte au cas précédent.

Que l'on ait $\frac{aa - bb}{c}$, on se rappellera que $aa - bb$ est (25) la même chose que $(a + b) \times (a - b)$; ainsi, on se représentera $\frac{aa - bb}{c}$, sous cette forme
 $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$, & l'on cherchera une quatrième proportionnelle à c , $a + b$, & $a - b$.

Si la

Si la quantité à construire est $\frac{abc}{de}$, on mettra cette quantité sous cette forme $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; & ayant construit $\frac{ab}{d}$, comme on vient de l'enseigner, on nommera m la ligne qu'aura donné cette construction; alors $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, devient $\frac{mc}{e}$, qui se construit comme ci-dessus.

On voit donc que pour construire $\frac{a^2b}{c^2}$, on se le représenteroit comme $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$; on construiroit $\frac{a^2}{c}$, & en ayant représenté la valeur par m , on construiroit $\frac{mb}{c}$.

Ainsi tout l'art consiste à décomposer la quantité en portions, dont chacune revienne à la forme $\frac{ab}{c}$ ou $\frac{a^2}{c}$; & quoique cela puisse paroître difficile en quelques occasions, on en vient cependant facilement à bout, en employant des transformations.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, je supposerois arbitrairement, $b^3 = a^2m$, & $c^2 = an$; alors $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ se changeroit en $\frac{a^3 + a^2m}{a^2 + an}$ qui se réduit à $\frac{a^2 + am}{a + n}$, ou $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$, quantité facile à construire (après ce qui a été dit ci-dessus), dès qu'on connoitra m & n . Or pour connoître m & n , les équations $b^3 = a^2m$ & $c^2 = an$, donnent $m = \frac{b^3}{a^2}$ & $n = \frac{c^2}{a}$, qui se construisent par ce qui précède.

Ainsi tant que la quantité sera rationnelle, c'est-à-dire, sans radicaux; si le nombre des dimensions du numérateur

ne surpasse que d'une unité celui des dimensions du dénominateur, on ramènera toujours sa construction à chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Il arrive quelquefois que les quantités se présentent sous une forme qui semble rendre inutile le secours des transformations : c'est lorsque la quantité n'est pas *homogène* ; c'est-à-dire, lorsque chacun des termes du numérateur ou du dénominateur n'est pas composé du même nombre de facteurs, par exemple, lorsque la quantité est telle que $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Mais il faut observer que l'on n'arrive jamais à un pareil résultat, que lorsque dans le cours d'un calcul on a supposé (dans la vue de simplifier le calcul) quelque-une des quantités égale à l'unité. Par exemple, si dans $\frac{a^3 + b^2 c}{a^2 + c^2}$, je suppose b égal à 1, alors j'aurai $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. Mais comme on ne peut jamais entreprendre de construire, sans connoître les élémens qu'on emploie pour cette construction, on fait toujours dans chaque cas quelle est cette quantité qu'on a supposée égale à l'unité ; on pourra donc toujours la restituer ; & il ne peut y avoir d'embarras là-dessus, parce que le nombre des dimensions devant toujours être le même dans chaque terme du numérateur & du dénominateur (quoiqu'il puisse être différent des termes de l'un aux termes de l'autre), on restituera dans chaque terme une puissance de la ligne qu'on a prise pour unité, suffisamment élevée pour compléter le nombre des dimensions ; ainsi, si j'avois à construire $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$; supposant que d soit la ligne qui a été prise pour unité, j'écrirois $\frac{a^3 + b d^2 + c^2 d}{a d + b^2}$, que je construirois en faisant $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ &

$a^3 = d^3 p$, ce qui la changeroit en $\frac{d^3 p + b d^2 + d^2 n}{a d + d m}$,
 ou $\frac{d p + b d + n d}{a + m}$, ou $\frac{(p + b + n) d}{a + m}$, quantité facile
 à construire, dès qu'on aura construit les valeurs de m , n
 & p , savoir $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^2}{d^2}$, qui sont
 elles-mêmes faciles à construire, d'après ce qui a été dit
 ci-dessus.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons sup-
 posé que le nombre des facteurs, ou le nombre des dimen-
 sions de chaque terme du numérateur, ne surpassoit que
 d'une unité, celui des dimensions du dénominateur. Il peut
 le surpasser de deux, & même de trois, mais jamais de
 plus, à moins que quelque ligne n'ait été supposée égale à
 l'unité, ou que quelques-uns des facteurs ne représentent
 des nombres.

247. Lorsque le nombre des dimensions du numé-
 rateur de la quantité proposée surpassé celui des
 dimensions du dénominateur, de deux unités; alors
 la quantité exprime une surface dont on peut tou-
 jours ramener la construction à celle d'un parallélo-
 gramme, & même d'un quarré.

Par exemple, si j'avois à construire la quantité $\frac{a^3 + a^2 b}{a + c}$,
 je la considérerois comme $a \times \frac{a^2 + a b}{a + c}$; or $\frac{a^2 + a b}{a + c}$,
 se construit aisément par ce qui a été dit ci-dessus, en le
 considérant comme $a \times \frac{a + b}{a + c}$: supposons donc que m
 soit la valeur de la ligne qu'aura donnée cette construction;

alors $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$, deviendra $a \times m$; or si l'on fait de a , la hauteur, & de m , la base d'un parallélogramme, on aura $a \times m$ pour la surface de ce parallélogramme; donc réciproquement cette surface représentera $a \times m$ ou $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

On ramènera de même à une pareille construction, la quantité $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, en faisant $bc = am$ & $d^2 = an$; car alors elle deviendra $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$, qui est la même chose que $a \left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c} \right)$. Or le facteur $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ se rapporte aux constructions précédentes, ainsi que les valeurs de m & de n . Ayant trouvé la valeur de ce facteur, si je la représente par p , il ne s'agira plus que de construire $a \times p$, c'est-à-dire, faire un parallélogramme dont la hauteur soit a , & la base p .

248. Enfin si le nombre des dimensions du numérateur surpasse de 3 celui des dimensions du dénominateur, alors la quantité exprime un solide dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélipède.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$, je considérerois cette quantité comme étant la même que $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; & ayant construit $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, selon ce qui a été dit ci-dessus, si je représente par m la ligne qu'aura donnée cette construction, la question sera réduite à construire $ab \times m$; or ab représente, ainsi que nous venons de le voir, un parallélogramme; si donc on conçoit un parallélipède qui ait pour base ce parallélogramme, & qui ait pour hauteur la ligne

m , la solidité de ce parallépipède représentera $ab \times m$, c'est-à-dire, $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$.

249. Ce que nous venons de dire, suffit pour construire toute quantité rationnelle. Voyons maintenant les quantités radicales du second degré.

Pour construire \sqrt{ab} , il faut (*fig. 8*) tirer une ligne indéfinie AB , sur laquelle on prendra de suite la partie CA égale à la ligne a & la partie BC égale à la ligne b : sur la totalité AB comme diamètre, on décrira un demi-cercle qui coupe en D la perpendiculaire CD élevée sur AB au point C ; alors CD sera la valeur de \sqrt{ab} ; c'est-à-dire (*Géom. 126*), que pour avoir la valeur de \sqrt{ab} , il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les deux quantités représentées par a & b ; en effet on fait (*Géom. 125*) que $AC : CD :: CD : CB$, ou $a : CD :: CD : b$; donc, en multipliant les extrêmes & les moyens, on a $(CD)^2 = ab$, & par conséquent $CD = \sqrt{ab}$.

On voit par-là, comment on doit s'y prendre pour transformer en un quarré, une surface quelconque : s'il s'agit d'un parallélogramme dont a soit la hauteur & b la base, en nommant x le côté du quarré cherché, on aura $x^2 = ab$, & par conséquent $x = \sqrt{ab}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre la base & la hauteur. S'il s'agit d'un triangle que l'on fait (*Géom. 140*) être la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur, on prendra

une moyenne proportionnelle entre la base & la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur & la moitié de la base.

S'il s'agit d'un cercle, on prendra une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence; & s'il s'agit d'une figure rectiligne quelconque, comme on fait (*Géom.* 143) qu'elle est réductible à un triangle, on la réduira aisément en un quarré, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base & la moitié de la hauteur de ce triangle.

Mais si la figure n'étoit point construite, & que l'on eût seulement l'expression algébrique de sa surface, par le moyen de quelques-unes de ses dimensions, alors on construira comme pour les quantités que nous allons parcourir.

Si l'on avoit $\sqrt{3ab + b^2}$, on considéreroit cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(3a + b) \times b}$; on prendroit donc une moyenne proportionnelle entre $3a + b$ & b .

Pareillement, si l'on a $\sqrt{aa - bb}$, on considérera cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(a + b) \times (a - b)}$; (25) ainsi l'on prendra une moyenne proportionnelle entre $a + b$ & $a - b$. Si l'on a $\sqrt{a^2 + bc}$, on fera $bc = am$, & alors on aura $\sqrt{a^2 + am}$ ou $\sqrt{(a + m) \times a}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre $a + m$ & a , après avoir construit la valeur de $m = \frac{bc}{a}$, en suivant les règles données ci-dessus.

Pour construire $\sqrt{a^2 + b^2}$, on pourroit aussi faire $b^2 = am$ & construire $\sqrt{a^2 + am}$ selon ce qui vient d'être dit. Mais la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) nous en fournit une construction plus simple; la voici: tirez une ligne AB (*fig. 9*) égale à la ligne a ; à son extrémité

A , élevez une perpendiculaire AC égale à la ligne b ; alors si vous tirez BC , cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2 + b^2}$: en effet, puisque le triangle CAB est rectangle, on a (*Géom.* 164) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; donc $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On peut aussi, par le moyen du triangle rectangle, construire $\sqrt{a^2 - b^2}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus. Pour cet effet, on tirera (*fig. 11*) une ligne AB égale à a , & ayant décrit sur AB comme diamètre, le demi-cercle ACB , on tirera du point A , une corde $AC = b$; alors si l'on tire BC , cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2 - b^2}$; car le triangle ABC étant rectangle (*Géom.* 165), on a $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$; donc $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; donc $BC = \sqrt{a^2 - b^2}$.

On peut donc construire aussi $\sqrt{a^2 + bc}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus, en s'y prenant de cette manière. Faire $bc = m^2$, & construire $\sqrt{a^2 + m^2}$ comme il vient d'être dit; & pour cet effet, on commencera par déterminer m en prenant une moyenne proportionnelle entre b & c , ainsi que l'indique l'équation $bc = m^2$, qui donne $m = \sqrt{bc}$.

S'il y avoit plus de deux termes sous le radical, on ramèneroit toujours la construction à quelques-unes

des méthodes précédentes, par le moyen de transformations. Par exemple, si j'avois $\sqrt{a^2 + bc + ef}$, je ferois $bc = am$, $ef = an$, & j'aurois $\sqrt{a^2 + am + an}$ ou $\sqrt{(a + m + n) \times a}$, que je construïrois en prenant une moyenne proportionnelle entre a & $a + m + n$, après avoir construit les valeurs de m & de n , savoir $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$. Je pourrois encore faire $bc = m^2$, $ef = n^2$, & alors j'aurois à construire $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2}$. Or lorsque le radical renferme ainsi une suite de quarrés positifs, par exemple, $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \&c.}$ on fera $\sqrt{a^2 + m^2} = h$, $\sqrt{h^2 + n^2} = i$, $\sqrt{i^2 + p^2} = k$, & ainsi de suite; & comme chacune de ces quantités se trouve déterminée par la précédente, la dernière donnera la valeur de $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \&c.}$. Pour construire ces quantités de la manière la plus simple, on regardera successivement chaque hypoténuse comme un côté, par exemple, (*fig. 10*) ayant pris $AB = a$, élevé la perpendiculaire $AC = m$, & tiré BC qui sera h , on élèvera au point C , sur BC , la perpendiculaire $CD = n$; & ayant tiré BD qui sera i , à son extrémité D , on élèvera sur BD la perpendiculaire $DE = p$, & BE sera k ou $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$.

Si quelques-uns de ces quarrés sont négatifs, alors on réunira à ce que nous venons de dire, ce qui a été dit pour construire $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Enfin si l'on avoit à construire une quantité de cette forme $\frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{d+e}}$, on la changeroit en $\frac{a\sqrt{[(b+c)(d+e)]}}{d+e}$, en multipliant haut & bas par $\sqrt{d+e}$; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre $b+c$ & $d+e$, & la nommant m , on auroit à construire $\frac{am}{d+e}$, ce qui est facile.

Au reste, il s'agit ici de règles générales; on peut souvent construire d'une manière beaucoup plus simple, en partant toujours des mêmes principes; mais ces simplifications se tirent de quelques considérations particulières & propres à chaque question, & ne peuvent, par conséquent, être exposées qu'à mesure que les questions en amènent l'occasion. Nous remarquerons seulement, en terminant cette matière, que quoique la construction des quantités radicales, dont il vient d'être question, se réduise à prendre des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, & à construire des triangles rectangles, cependant on peut quelquefois avoir des constructions plus ou moins simples ou élégantes, selon la méthode qu'on emploie pour trouver ces moyennes proportionnelles; c'est pourquoi nous enseignerons ici deux autres manières de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

La première consiste à décrire sur la plus grande

AB des deux lignes données (*fig. 11*) un demi-cercle ACB ; & ayant pris une partie AD égale à la seconde, élever la perpendiculaire DC , & tirer la corde AC qui sera moyenne proportionnelle entre AB & AD ; car en tirant CB , le triangle ACB (*Géom. 65*) est rectangle, & par conséquent, (*Géom. 112*) AC est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse AB & le segment AD .

La seconde manière consiste (*fig. 12*) à tirer une ligne AB égale à la plus grande ligne donnée, & ayant pris sur elle une partie AC égale à la plus petite, décrire sur le reste BC , un demi-cercle CDB , auquel on mène la tangente AD , qui (*Géom. 129*) est moyenne proportionnelle entre AB & AC .

On voit donc que les quantités rationnelles peuvent toujours être construites par le moyen des lignes droites, & que les quantités radicales du second degré peuvent être construites par le cercle & la ligne droite réunis.

Quant aux quantités radicales de degrés supérieurs, leur construction dépend de la combinaison de différentes lignes courbes : nous en parlerons par la suite.

Nous allons nous occuper, pour le présent, des questions dont la solution dépend de quantités ou rationnelles, ou radicales du second degré.

Diverses questions de Géométrie , & réflexions tant sur la manière de les mettre en équations, que sur les diverses solutions que donnent ces Équations.

250. Le principe que nous avons donné (67) pour mettre les questions en équation , s'applique également aux questions de Géométrie. Il faut de même représenter ce que l'on cherche , par un signe particulier , & raisonner ensuite à l'aide de ce signe & de ceux qui représentent les autres quantités , comme si tout étoit connu , & que l'on voulût vérifier. Cette méthode ou manière de procéder , est ce qu'on appelle l'*Analyse*. Pour être en état de faire les raisonnemens qu'exige cette vérification , il faut connoître au moins quelques propriétés de la quantité que l'on cherche. Il est donc clair que pour être en état de mettre les questions de Géométrie en équation , il faut avoir présentes à l'esprit les connoissances que nous avons données dans la seconde Partie de ce Cours. Dans la plupart des questions numériques , ou de la nature de celles que nous avons parcourues dans la première Section , il suffit le plus souvent , pour appliquer le principe , de traduire en langage algébrique l'énoncé de la question ; mais dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie , il faut souvent employer encore

d'autres moyens : nous tâcherons de les faire connoître à mesure que nous avancerons ; mais ce que nous pouvons dire en général , pour le présent , c'est qu'il n'est pas toujours nécessaire , pour vérifier une quantité , d'examiner si elle satisfait immédiatement aux conditions de la question : cette vérification se fait souvent avec plus de facilité , en examinant si cette quantité a certaines propriétés qui sont essentiellement liées avec les conditions de la question. Après cette réflexion dont nous aurons occasion de faire usage , nous passons aux exemples , qui dans cette matière sont toujours plus faciles à saisir que les préceptes généraux.

251. Proposons-nous donc pour première question , de *décrire un quarré* $ABCD$ (fig. 13) *dans un triangle donné* EHL

Par ces mots , *un triangle donné* , nous entendons un triangle dans lequel tout est connu , les côtés , les angles , la hauteur , &c.

Avec un peu d'attention , on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HL , cette ligne AB soit égale à GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement ; il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB , & celle de GF , & ensuite les égaier.

Nommons donc a la hauteur connue EF ; b la base connue HI , & x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI , on doit (Géom. 115) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : EG :: HI : AB$, ou $a : a - x :: b : AB$; donc (Arith. 179) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF , on aura $\frac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \frac{ab}{a + b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (246), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b , & a , ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire, égale à $EF + HI$, & l'on tirera EO ; puis ayant pris FM égale à $HI = b$, on mènera, parallèlement à EO , la ligne MG , qui par sa rencontre avec EF , déterminera GF pour la valeur de x ; car les triangles semblables EFO , GFM donnent $FO : FM :: FE : FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a + b}$.

252. Proposons-nous pour seconde question, celle-ci... Connoissant la longueur de la ligne BC (fig. 14),

& les angles B & C que forment avec elle les deux lignes BA & CA , déterminer la hauteur AD à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent.

On fait entrer les angles dans le calcul algébrique à l'aide des mêmes lignes qu'on emploie dans la Trigonométrie, c'est-à-dire, à l'aide des sinus, tangentes, &c. Ainsi quand on dit qu'on donne un angle, l'angle C , par exemple, on entend que l'on donne la valeur de son sinus ou de sa tangente; cela posé, nommons $BC = a$, $AD = y$. Dans le triangle rectangle ADC , nous aurons (*Géom.* 296) $CD : DA ::$ comme le rayon est à la tangente de l'angle ACD : ou $CD : y :: r : m$, en appelant r le rayon & m la tangente de l'angle ACD ; donc (*Arith.* 179) $CD = \frac{ry}{m}$. Par un raisonnement semblable, on trouvera, en nommant n la tangente de ABD , $BD : y :: r : n$, donc $BD = \frac{ry}{n}$; or $BD + DC = BC = a$; donc $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$. D'où l'on tire $y = \frac{am n}{rn + rm}$.

On peut rendre cette expression plus simple, en introduisant, au lieu des tangentes m & n des deux angles C & B , leurs cotangentes que nous nommerons p & q . Pour cet effet, il faut se rappeler (*Géom.* 280) que $\text{tang.} : r :: r : \text{cot.}$; en vertu de

cette proposition , on aura $m : r :: r : p$ & $n : r :: r : q$; d'où l'on tire $m = \frac{r^2}{p}$ & $n = \frac{r^2}{q}$; substituant, au lieu de m & n , ces valeurs , dans celle de y , on aura $y = \frac{\frac{ar^4}{\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q}}}{\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q}} = \frac{\frac{ar^4}{\frac{pq}{pr^2 + qr^2}}}{\frac{pq}{pr^2 + qr^2}} = \frac{ar^4}{pq} \times \frac{pq}{pr^2 + qr^2} = \frac{ar}{p + q}$, qui se construit facilement en prenant une quatrième proportionnelle à $p + q$, r & a .

253. On voit par-là , que lorsque parmi les quantités qu'on peut regarder comme données, celles qu'on a employées ne conduisent pas à un résultat aussi simple qu'on le desire, il n'est pas nécessaire de recommencer un nouveau calcul pour s'assurer si, en employant les autres données, on ne pourroit pas arriver à un résultat plus simple. Il suffit d'exprimer par des équations les rapports des données qu'on a employées d'abord, avec celles qu'on veut introduire, c'est ainsi que nous venons d'exprimer m & n par les équations $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$; alors par de simples substitutions, nous avons eu une solution dépendante de p & de q .

254. Nous choisirons pour troisième exemple une question qui nous donne lieu tout à la fois de faire voir la manière de mettre en équation les questions de Géométrie , & comment par différentes

préparations de ces équations , on peut découvrir de nouvelles propositions.

Connoissant les trois côtés d'un triangle A B C (fig. 15), trouver les segmens A D & D C formés par la perpendiculaire B D , & la perpendiculaire B D elle-même.

Si je connoissois chacune de ces lignes , voici comment je les vérifierois. J'ajouterois le quarré de $B D$ avec le quarré de $C D$, & je verrois si la somme est égale au quarré de $B C$; ce qui doit être, puisque le triangle $B D C$ est rectangle (*Géom.* 164). J'ajouterois de même le quarré de $A D$ au quarré de $B D$, & je verrois si la somme est égale au quarré de $A B$.

Imitons donc ce procédé , & pour cet effet nommons $B D$, y ; $C D$, x ; $B C = a$; $A B = b$; $A C = c$; alors $A D$ qui est $= A C - C D$, sera $= c - x$. Nous aurons donc $xx + yy = aa$, & $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Comme xx & yy n'ont , dans chaque équation, d'autre coefficient que l'unité, je retranche la seconde équation de la première, ce qui me donne tout de suite,

$$2cx - cc = aa - bb ; \text{ d'où l'on tire } x = \frac{aa - bb + cc}{2c} \\ = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c , \text{ qu'on peut écrire ainsi,} \\ x = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c \quad (25).$$

Or,

Or, sous cette forme, on voit, d'après ce qui a été dit (246), que pour avoir x il faut chercher une quatrième proportionnelle à c , $a + b$, & $a - b$; & l'ayant trouvée, en prendre la moitié que l'on ajoutera avec $\frac{1}{2} c$, c'est-à-dire, avec la moitié du côté AC ; ce qui est absolument conforme à ce que nous avons dit (*Géom.* 303).

Mais on peut tirer plusieurs autres conclusions de ces mêmes équations; nous allons en exposer quelques-unes, pour accoutumer les commençans à lire dans une équation ce qu'elle renferme.

255. 1°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, est la même chose que $c \cdot (2x - c) = (a + b)(a - b)$. Or puisque le produit des deux premiers facteurs est égal au produit des deux derniers, on peut (*) considérer les deux premiers, comme les extrêmes, & les deux derniers comme les moyens d'une proportion, & l'on aura par conséquent $c : a + b :: a - b : 2x - c$; or $2x - c$ est x moins $c - x$; donc en remettant à la place de ces lettres, les lignes qu'elles représentent, on aura $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$, ce qui est précisément ce que nous avons démontré (*Géom.* 302).

(*) Dorénavant lorsque nous aurons ainsi partagé chaque membre d'une équation en deux facteurs, nous conclurons tout de suite la proportion. Il suffit d'être averti, une fois pour toutes, que	dès que deux produits sont égaux, les facteurs de l'un peuvent être considérés comme les extrêmes d'une proportion dont les facteurs de l'autre seroient les moyens (<i>Arith.</i> 180).
---	---

256. 2°. Si du point C comme centre, & d'un rayon égal à BC , on décrit l'arc BO , & si l'on tire la corde BO , on aura $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; or $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; donc $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$; mais nous avons trouvé ci-dessus $yy + xx = aa$; donc $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; mettant donc pour x , la valeur $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, on aura $(BO)^2 = 2a \left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c} \right) = 2a \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c} \right) = \frac{a}{c} \times [bb - (a - c)^2]$; parce que $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a - c)^2$; or (25) en considérant $a - c$ comme une seule quantité, on a $bb - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; donc $(BO)^2 = \frac{a}{c} (b + a - c)(b - a + c)$ qu'on peut mettre sous cette autre forme $(BO)^2 = \frac{a}{c} (a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; donc si on nomme $2s$ la somme des trois côtés, on aura $(BO)^2 = \frac{a}{c} (2s - 2c)(2s - 2a) = 4 \frac{a}{c} (s - a)(s - c)$; or si du point C , on abaisse sur OB la perpendiculaire CI , on aura (Géom. 295) dans le triangle rectangle CIO , cette proportion $CO : OI :: R : \sin. OCI$, c'est-à-dire, $a : \frac{1}{2} BO :: R : \sin. OCI$; donc $\frac{1}{2} BO = \frac{a \sin. OCI}{R}$, ou $BO = \frac{2a \sin. OCI}{R}$; & par conséquent $\overline{BO}^2 = \frac{4a^2 (\sin. OCI)^2}{R^2}$ égalant ces deux valeurs de BO^2 , on aura $\frac{4a^2}{R^2} (\sin. OCI)^2 = \frac{4a}{c} (s - a)(s - c)$, ou en divisant par $4a$, & chassant les dénominateurs, $ac (\sin. OCI)^2 = R^2 (s - a)(s - c)$, d'où l'on tire cette proportion $ac : (s - a)(s - c) :: R^2 : (\sin. OCI)^2$;

qui est la règle que nous avons donnée (Géom. 304) pour trouver les angles d'un triangle par le moyen des trois côtés, mais dont nous avons renvoyé la démonstration à cette troisième Partie. En effet ac est le produit des deux côtés qui comprennent l'angle BCA ; $s - a$ & $s - c$ sont les deux restes que l'on a en retranchant ces deux mêmes côtés successivement de la demi-somme, R est le rayon, & OCI est la moitié de l'angle BCA , puisque CI est une perpendiculaire menée du centre C sur la corde BO .

257. 3°. L'équation $yy + xx = aa$, donne $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$; donc en mettant pour x , sa valeur, on aura.

$$yy = \left(a + \frac{aa - bb + cc}{2c}\right) \left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) =$$

$$\left(\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) =$$

$$\left(\frac{(a + c)^2 - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb - (a - c)^2}{2c}\right) =$$

$$\left(\frac{a + c + b}{2c}(a + c - b)\right) \times \left(\frac{b + a - c}{2c}(b - a + c)\right),$$

donc $4ccyy = (a + c + b)(a + c - b)(b + c - a)(b - c + a)$, ou $4ccyy = (a + b + c)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)$; donc en nommant $2s$ la somme $a + b + c$ des trois côtés, on aura $4ccyy = 2s \cdot (2s - 2b)(2s - 2a)(2s - 2c)$, ou $4ccyy = 16s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)$, ou divisant par 16, réduisant, & tirant la racine quarrée,

$$\frac{cy}{2} = \sqrt{[s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)]}. \text{ Mais } \frac{cy}{2} \text{ ou}$$

$\frac{AC \times BD}{2}$ est la surface du triangle ABC ; donc pour avoir

la surface d'un triangle, par le moyen des trois côtés, il faut de la demi-somme retrancher successivement chacun

des trois côtés; multiplier les trois restes entre eux & par la demi-somme, & enfin tirer la racine quarrée de ce produit.

258. 4°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, donne $bb = aa + cc - 2cx$; mais si la perpendiculaire tombe hors du triangle, on auroit, en conservant les mêmes dénominations (*fig. 16*), $yy + xx = aa$, & $yy + cc + 2cx + xx = bb$, parce que AD qui étoit $c - x$, est ici $c + x$. Donc retranchant la première équation de la seconde, on auroit $cc + 2cx = bb - aa$, ou $c(c + 2x) = (b + a) \times (b - a)$, qui donne $c : b + a :: b - a : c + 2x$; or $c + 2x$ étant $x + c + x$ est $CD + AD$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons démontrée (*Géom. 302*).

259. 5°. La même équation $cc + 2cx = bb - aa$, donne $bb = aa + cc + 2cx$; comparant donc à l'équation $bb = aa + cc - 2cx$ qui convient à la figure 15, on voit que le quarré bb du côté AB opposé à l'angle aigu C , vaut moins que la somme $aa + cc$ des quarrés des deux autres côtés, puisqu'il vaut cette somme diminuée de $2cx$. Au contraire, le quarré bb du côté AB , opposé à l'angle obtus (*fig. 16*) vaut $aa + cc + 2cx$, c'est-à-dire, plus que la somme des quarrés des deux autres côtés. On peut donc, par ces deux remarques, lorsqu'on a à calculer les angles d'un triangle par le moyen des côtés, reconnoître si l'angle que l'on cherche, doit être aigu ou obtus.

260. 6°. Les deux équations $bb = aa + cc - 2cx$, & $bb = aa + cc + 2cx$, confirment ce que nous avons

dit sur les quantités négatives. Car on voit que selon que la perpendiculaire BD (*fig. 15 & 16*) tombe dans le triangle ou au-dehors, le segment CD est de différens côtés. Or dans ces équations le terme $2cx$ a en effet des signes contraires. Donc réciproquement, quels que soient les calculs que l'on aura faits pour l'un de ces triangles, on aura ceux qui conviennent pour les cas analogues du second, en donnant des signes contraires aux parties qui seront situées de différens côtés, sur une même ligne : or dans ce que nous avons dit ci-dessus, tant sur le calcul de l'un des angles, que sur celui de la surface, le segment CD n'y entre plus ; donc ces deux propositions appartiennent indifféremment à toute espèce de triangle rectiligne.

On pourroit tirer encore de ces mêmes équations, plusieurs autres propositions ; mais nous avons d'autres objets à envisager.

261. Quoiqu'en général on ait d'autant plus de ressources & de facilité pour mettre les questions de Géométrie en équation, que l'on connoît un plus grand nombre de propriétés des lignes ; cependant, comme l'Algèbre elle-même fournit les moyens de trouver ces propriétés, le nombre des propositions vraiment nécessaires, est assez limité. Ces deux propositions, que *les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels*, & que *dans un triangle rectangle, la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, est égale au quarré de l'hypoténuse*, ces

deux propositions , dis-je , sont la base de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Mais selon la nature des questions , il peut y avoir bien des manières de faire usage de ces deux propositions. Cet usage n'étoit point difficile à appercevoir dans la question que nous venons de traiter. Mais dans les conséquences que nous avons tirées de sa résolution pour le calcul de l'angle , par le moyen des trois côtés , l'idée de décrire l'arc BO (*fig. 15*) , pour calculer la corde BO & par sa moitié OI , calculer le sinus de l'angle $O CI$, cette idée ne se présente pas d'abord. Il en est de même de beaucoup d'autres questions. Tantôt ce sont des lignes qu'il faut prolonger jusqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres ; tantôt des lignes qu'il faut mener parallèles à quelque autre , ou faisant un angle donné avec quelque autre. En un mot , l'application de l'Algèbre à la Géométrie , ainsi qu'à toute autre matière , exige de la part de *l'Analyste* , un certain discernement dans le choix & l'emploi des moyens. Mais comme ce discernement s'acquiert en grande partie par l'usage , nous allons appliquer ces observations à divers exemples.

261. Proposons-nous d'abord cette question : *D'un point A (fig. 17) dont la situation est connue à l'égard de deux lignes HD & DI qui font entre elles un angle*

connu HDI , tirer une ligne droite AEG de manière que le triangle intercepté EDG , ait une surface donnée; c'est-à-dire, une surface égale à celle d'un carré connu cc .

Du point A menons la ligne AB parallèle à DH , & la ligne AC perpendiculaire sur DG prolongée: du point E où la ligne AEG doit couper DH , concevons la perpendiculaire EF . Si nous connoissons EF & DG , en les multipliant l'une par l'autre, & prenant la moitié du produit, nous aurions la surface du triangle EDG , laquelle devroit être égale à cc .

Supposons donc $DG = x$; à l'égard de EF , voyons si nous ne pouvons pas en déterminer la valeur, tant par le moyen de x , que de ce qu'il y a de connu dans la question.

Puisqu'on suppose que la situation du point A est connue, on doit regarder comme connue la distance BD à laquelle passe la parallèle AB , & la distance AC du point A à la ligne DG prolongée. Nommons donc BD, a , & AC, b ; alors les triangles semblables ABG & EDG , nous donnent $BG : DG :: AG : EG$; & les triangles semblables $ACG : EFG$, nous donnent $AG : EG :: AC : EF$; donc $BG : DG :: AC : EF$; c'est-à-dire, $a + x : x :: b : EF$; donc (*Arith.* 179)

$EF = \frac{bx}{a+x}$ (*); puis donc que la surface du triangle EDG doit être égale au carré cc , il faut que $EF \times \frac{DG}{2}$ ou $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$, c'est-à-dire, que $\frac{bx^2}{2a+2x} = cc$, ou chassant le dénominateur, $bx^2 = 2acc + 2ccx$.

Cette équation résolue suivant les règles des équations du second degré (99 & 100), donne ces deux valeurs, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + \frac{2acc}{b}\right)}$; dont celle qui a le signe — est inutile à la question précédente.

Pour construire la première, je la mets sous la forme suivante, $x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \frac{cc}{b}\right]}$: cela posé, ayant tiré une ligne indéfinie PQ (fig. 18), sur un point quelconque C de cette ligne, j'élève la perpendiculaire $AC = b$, & je prends sur CA & CP les lignes CO , CM égales chacune au côté c du carré donné; ayant tiré AM , je lui mène par le point O la parallèle ON qui me détermine CN pour la valeur de $\frac{cc}{b}$, puisque les triangles semblables ACM , OCN donnent $AC : OC :: CM : CN$,

<p>(*) A l'avenir, toutes les fois que nous aurons à exprimer un terme d'une proportion dont trois seront exprimés algébriquement, nous prendrons, sans en</p>	<p>avertir davantage, le produit des deux moyens divisé par l'extrême, ou des deux extrêmes divisé par le moyen, selon que le terme cherché sera un extrême ou un moyen.</p>
--	--

c'est-à-dire, $b : c :: c : CN$; donc $CN = \frac{c^2}{b}$; cela étant, la valeur de x devient donc $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; or $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$ exprime (249) une moyenne proportionnelle entre CN & $CN + 2a$; il ne s'agit donc plus que de déterminer cette moyenne proportionnelle, & de l'ajouter à CN . Pour cet effet, sur NC prolongée, je prends $CQ = 2a$; & sur la totalité NQ , je décris le demi-cercle NVQ rencontré en V par CA ; je porte la corde NV de N en P , & j'ai CP pour la valeur de x ; car NV (*Géom.* 112) est moyenne proportionnelle entre NC & NQ , c'est-à-dire, entre CN & $CN + 2a$; donc NV ou $PN = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; donc $CP = CN + PN = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]} = x$; on portera donc CP de D en G (*fig. 17*), & l'on aura le point G par lequel & par le point A tirant AG , on aura le triangle EDG égal au quarré cc .

263. Si l'on veut savoir ce que signifie la seconde valeur de x , savoir, $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \frac{cc}{b}\right]}$, on remarquera que rien, dans la question, ne déterminant s'il s'agit plutôt de l'angle EDG (*fig. 17*) que de son égal $E'DG'$ formé par le prolongement des lignes GD , ED , & les quantités données étant les mêmes pour celui-ci que pour l'autre, cette seconde solution doit être celle de la question où il s'agiroit de faire dans l'angle $E'DG'$ la même chose que nous avons faite dans l'angle EDG . En effet,

en nommant DG' , x ; & conservant les autres dénominations, les triangles ABG' , $E'DG'$, semblables à cause des parallèles AB & DE' donnent $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; & en abaissant la perpendiculaire $E'F'$, les triangles semblables ACG' , $E'F'G'$ donnent $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; donc $BG' : DG' :: AC : F'E'$, c'est-à-dire, $a - x : x :: b : F'E'$; donc $F'E' = \frac{bx}{a - x}$; puis donc que la surface du triangle $G'E'D$ doit être égale au quarré cc , il faut que $\frac{bx}{a - x} \times \frac{x}{2} = cc$; ce qui donne $bx = 2acc - 2ccx$, & par conséquent, $x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, valeurs de x qui font précisément les mêmes que celles du cas précédent, avec cette différence qu'elles ont des signes contraires, ainsi que cela doit être, puisqu'ici la quantité x est prise du côté opposé à celui où on la prenoit d'abord. Nouvelle confirmation de ce que nous avons déjà dit plus d'une fois, que les valeurs négatives devoient être prises dans un sens opposé à celui où l'on a pris les positives.

La construction que nous avons donnée pour le cas précédent, sert aussi pour celui-ci, avec ce seul changement, de porter (*fig. 18*) NV de N en K vers Q ; alors la valeur de x , qui dans le cas précédent, étoit CP , sera CK dans celui-ci. En effet, la valeur de x , qui convient au cas présent, est $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, c'est-à-dire, $x = -CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; puis donc que $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, on a $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$; ainsi on portera CK de

D en G' (*fig. 17*), & l'on aura le point G' par lequel & par le point A tirant $AG'E'$, on aura le triangle $G'DE'$ égal au quarré cc ; c'est-à-dire, la seconde solution de la question.

264. Nous avons supposé que le point A (*fig. 17*) étoit au-dessus de la ligne BG ; s'il étoit au-dessous, (*fig. 19*) la quantité b , ou la ligne AC seroit négative, & les deux premières valeurs de x seroient par conséquent $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; où l'on voit que le problème n'est possible alors que lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, puisque lorsqu'il est plus grand, la quantité qui est sous le radical, est négative, & par conséquent (98) les valeurs de x sont imaginaires ou absurdes. Lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, les deux valeurs de x sont négatives; c'est-à-dire, qu'alors le problème est impossible à l'égard de l'angle HDI ; mais il a deux solutions à l'égard de son égal $E'DG'$. Pour avoir ces deux solutions, il faut construire les deux valeurs $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, ce que l'on fera de la manière suivante. Ayant déterminé, comme ci-dessus, la valeur CN de $\frac{cc}{b}$, on prendra (*fig. 20*) $NQ = 2a$, & ayant décrit sur NQ comme diamètre, le demi-cercle NVQ , on lui mènera la tangente CV ; on portera ensuite CV de C en P vers N , & de C en K à l'opposite; alors NP & NK seront les deux valeurs de x ; on les portera (*fig. 19*) de D en G & de D en G' ; & tirant par le point A & par les points G & G' les deux droites

EG , $E'G'$, chacun des deux triangles EDG , $E'DG'$ sera égal au carré cc . Quant à ce que nous disons que NP & NK (*figure 20*) seront les deux valeurs de x , cela se tire de ce que (*Géométrie 129*) CV étant moyenne proportionnelle entre CN & CQ , est $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, ou (en mettant pour ces lignes, leurs valeurs)

$$CV \text{ ou } CP \text{ ou } CK = \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]};$$

$$\text{donc } NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \frac{cc}{b}\right]};$$

$$\& NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]};$$

• or ces deux quantités sont les mêmes que les valeurs de x , en changeant les signes; donc ces mêmes quantités portées de D vers G (*fig. 19*) seront les valeurs de x .

265. Si le point A (*fig. 21*) étoit dans l'angle même HDI , alors BD tombant du côté opposé à celui où il tomboit d'abord, a seroit négatif & les deux valeurs primitives de x , deviendroient $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$, qui sont les mêmes (en changeant les signes) que celles que nous venons de construire. On voit donc qu'alors on doit construire, comme on l'a fait (*fig. 20*); mais porter les valeurs NP & NK de x , les porter, dis-je (*fig. 21*), de D vers I ; & l'on aura les deux triangles DEG , $DE'G'$ qui satisferont tous deux à la question.

266. Enfin, le point A (*fig. 22*) pourroit être situé au-dessous de BD , mais dans l'angle BDE' . Alors a & b seroient tous deux négatifs, ce qui donneroit $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, qui sont précisément de signe contraire aux premières valeurs que nous avons trouvées pour x .

On construira donc, comme on l'a fait (*fig. 18*). Alors CK sera la valeur positive de x , & CP sa valeur négative; on portera la première (*fig. 22*) de D en G vers B , & l'autre à l'opposite, c'est-à-dire, de D en G' .

Nous avons insisté sur les différens cas de cette solution, pour faire voir comment une seule équation les comprend tous; comment on les en déduit par le seul changement des signes; comment les positions contraires des lignes, sont désignées par la contrariété des signes, & réciproquement. Il nous reste encore à indiquer quelques usages de cette même solution.

267. Si l'on proposoit cette question: *D'un point donné A* (*fig. 23*) *hors d'un triangle ou dans un triangle donné DHI, mener une ligne AF qui divise ce triangle en deux parties DEF, EFH qui soient entre elles dans un rapport connu & marqué par le rapport de m : n, cette question trouveroit sa solution dans la précédente.* Car puisque le triangle DHI est donné, & que l'on sait quelle partie le triangle DEF doit être du triangle DHI ; si l'on cherche le quatrième terme de cette proportion $m + n : m ::$ la surface du triangle DHI , est à un quatrième terme; ce quatrième terme sera la surface que doit avoir le triangle DEF . Or on peut toujours trouver un carré cc égal à cette surface (249); la question est donc réduite à mener par le point A , une ligne AEF qui comprenne avec les deux côtés DH, DI , un triangle DEF égal au carré cc ; c'est-à-dire, est réduite à la question précédente.

268. On voit encore qu'on ramèneroit à la même question, celle de partager une figure rectiligne quelconque (*fig. 24*) par une ligne tirée d'un point quelconque A ;

en deux parties $BCFE$, $EFDHK$, qui fussent entre elles dans un rapport donné. En effet, la figure $BCDHK$ étant supposée connue, on connoît tous les angles & tous les côtés; on connoitra donc facilement le triangle BLC formé par les deux côtés KB & DC prolongés, puisqu'on connoît dans ce triangle, le côté BC & les deux angles LBC , LCB supplémens des angles connus CBK & BCF ; ainsi on doit regarder la surface du triangle LBC comme connue; & puisque celle de $EBCF$ doit être une portion déterminée de la surface totale, elle est donc connue aussi; la question est donc réduite à mener une ligne AEF qui forme dans l'angle KLD , un triangle égal à un carré connu. Enfin on voit par-là, comment on partageroit cette figure, en un plus grand nombre de parties dont les rapports seroient donnés.

269. Une remarque qu'il est encore à propos de faire, & que nous allons confirmer par d'autres exemples, c'est que, si quelques-unes des quantités données qui entrent dans l'équation qui sert à résoudre une question, sont telles qu'en changeant leurs signes, en signes contraires, l'équation ne change point; ou si un changement de position dans la ligne ou les lignes cherchées de la figure, n'entraîne aucun changement de position ni de grandeur dans les lignes données, alors parmi les différentes valeurs de x , lorsqu'il y en a plusieurs dans l'équation, on en trouvera toujours une qui sera la solution propre pour le cas qu'indique ce changement.

Par exemple , dans la question que nous venons de traiter , on a vu que l'une des valeurs de x donnoit directement la solution pour le cas où la ligne AEG (fig. 17) devoit traverser l'angle HDI , ainsi qu'on l'a supposé en faisant le calcul ; mais on a vu en même temps que la seconde valeur de x donnoit la solution pour le cas où il s'agiroit non pas de l'angle HDI , mais de son opposé au sommet. La raison en est qu'ayant dans chaque cas , les mêmes quantités données à employer , & les mêmes raisonnemens à faire , on ne peut être conduit qu'à la même équation ; donc la même équation doit donner les deux solutions. Nous allons en voir encore des exemples , en parcourant d'autres questions.

270. Proposons-nous cette question. *D'un point donné A hors d'un cercle BDC (fig. 25) tirer une ligne droite AE , de manière que sa partie DE interceptée dans le cercle soit égale à une ligne donnée.*

Puisque le cercle $BDEC$ est donné , son diamètre est censé connu ; & puisque le point A est donné , si l'on tire par le centre O la droite AOC , on est censé connoître la ligne AB , & par conséquent la ligne AC . Pour savoir comment on doit tirer la ligne AE , il ne s'agit que de savoir de quelle grandeur doit être AD , pour que son prolongement DE soit égal à la ligne donnée. Je nomme donc AD , x ; la ligne connue AB , a ; la ligne connue AC , b ; enfin je nomme c , la ligne donnée à laquelle DE doit être égale. Cela posé ,

Puisque la figure $B D E C$ est un cercle, les sécantes AC , AE doivent (*Géom.* 127) être réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures ; on doit donc avoir $AC : AE :: AD : AB$; c'est-à-dire, en vertu des dénominations précédentes, $b : x + c :: x : a$; donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $xx + cx = ab$, équation du second degré qui étant résolue donne $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$; dont la première valeur, $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$, satisfait seule à la question actuelle.

Pour achever la solution, il faut construire cette quantité, ce qu'on peut faire sans employer les transformations enseignées (246). Pour cet effet, on tirera du point A , la tangente AT qui (*Géom.* 129) étant moyenne proportionnelle entre AB & AC , donnera $(AT)^2 = ab$; la valeur de x deviendra donc $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + (AT)^2]}$: tirons le rayon TO , il fera perpendiculaire à AT (*Géom.* 48) ; si donc on prend $TI = \frac{1}{2}c$, alors en tirant AI , on aura $AI = \sqrt{[\frac{1}{4}cc + (AT)^2]}$; donc pour avoir x , il ne s'agit plus que de porter TI de I en R & de décrire du point A comme centre & du rayon AR , l'arc RD qui déterminera le point cherché D ; car AD ou AR fera égal à $AI - IR = AI - TI = \sqrt{[\frac{1}{4}c^2 + (AT)^2]} - \frac{1}{2}c = x$.

Pour

Pour connoître maintenant ce que signifie la seconde valeur, $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$, il faut remarquer que puisqu'elle est toute négative, elle ne peut tomber que du côté opposé à celui vers lequel tend AD . Voyons donc s'il y a quelque question dépendante des mêmes quantités & des mêmes raisonnemens, & qui ait rapport à ce côté. Or je remarque que si l'on suppose a & b négatifs, l'équation $xx + cx = ab$ ne change en aucune manière; donc puisqu'alors le cercle $BDEC$ deviendrait $B'D'E'C'$ situé vers la gauche de la même manière que le premier l'est vers la droite, il s'ensuit que cette même équation renferme aussi la solution qui appartiendrait à ce cas; la seconde valeur de x , savoir $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$ appartient donc à ce même cas, & satisfait à la même condition; c'est pourquoi si dans la construction précédente on porte IT , de I en R' , sur AI prolongé, & qu'ensuite du point A comme centre & d'un rayon égal à AR' , on décrive un arc qui coupe, en E' , la circonférence $B'D'E'C'$, le point E' sera tel que la partie interceptée $E'D'$ sera égale à c ; en effet, AE' étant égal à $AR' = AI + IR'$, vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + AT^2} + \frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, sera égal à la seconde valeur de x en y changeant les signes; or puisqu'on porte cette quantité du côté opposé à celui vers lequel on a supposé que tendoit x , il

s'ensuit que AE' est véritablement la seconde valeur de x .

Au reste comme les deux cercles sont égaux & situés de la même manière, les deux solutions peuvent appartenir toutes deux au même cercle, en sorte que si l'on décrit du point A comme centre & du rayon AR' , l'arc $R'E$, la ligne AE résoudra aussi la question; en effet il est aisé de voir que le point E déterminé de cette manière est sur le prolongement de la ligne AD déterminée par la première construction. Mais des deux solutions distinctes que fournit l'Algèbre, la première tombe à la droite du point A , & appartient au point D de la circonférence convexe; la seconde tombe à la gauche, & appartient au point E' de la circonférence concave.

On voit par-là se confirmer de plus en plus, que les quantités négatives doivent être portées de côtés opposés, & réciproquement.

271. Supposons maintenant qu'il s'agit de *trouver sur la direction de la ligne donnée AB (fig. 26.) un point C tel que sa distance au point A , soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point B & la ligne entière AB .*

Je nommerai a , la ligne donnée AB ; & x , la distance cherchée AC ; alors BC fera $a - x$; &

puisque l'on veut que $AB : AC :: AC : CB$, ou que $a : x :: x : a - x$, il faut, en multipliant les extrêmes & les moyens, que $xx = aa - ax$, ou $xx + ax = aa$, équation du second degré, qui étant résolue, donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Pour construire la première valeur $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, il faut selon ce qui a été enseigné (249) élever au point B la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, & ayant tiré AD , on aura $AD = \sqrt{(BD^2 + AB^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; il ne s'agit donc plus que de retrancher de cette ligne, la quantité $\frac{1}{2}a$, ce qui se fera en portant DB de D en O ; alors AO vaudra $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, sera égale à x ; on portera donc AO de A en C vers B , & le point C où elle aboutira sera le point cherché.

Quant à la seconde valeur de x , savoir $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; si l'on porte BD de D en O' sur le prolongement de AD , alors AO' vaudra $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; puis donc que la valeur de x est cette même quantité, prise négativement, on portera AO' de A en C' sur AB prolongée du côté opposé à celui vers lequel on a supposé, dans la solution, que x rendoit, & l'on aura un second point C' qui sera, aussi, tel que sa distance au point A sera moyenne proportionnelle entre sa distance au point B & la ligne entière AB .

Remarquons en passant que cette question renferme celle de couper une ligne donnée AB en moyenne & extrême raison; aussi la construction que nous venons d'en donner, est-elle la

même que celle que nous avons donnée (*Géom.* 130). Mais on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction ; au lieu qu'en Géométrie nous supposons la construction déjà trouvée , & nous en démontrions seulement la légitimité.

272. Si l'on fait un peu d'attention sur la marche que nous avons observée dans les questions précédentes , on verra que nous avons toujours pris , pour l'inconnue , une ligne qui étant une fois connue serviroit à déterminer toutes les autres , en observant les conditions de la question. C'est ce qu'on doit toujours observer ; mais il y a encore un choix à faire pour se déterminer sur cette ligne : il y en a souvent plusieurs dont chacune auroit également la propriété de déterminer toutes les autres si une fois elle étoit connue ; or parmi celles-là il en est qui conduiroient à des équations plus composées les unes que les autres. Pour aider à se déterminer dans ces cas , nous placerons ici la règle suivante.

273. *Si parmi les lignes ou les quantités qui étant prises chacune pour l'inconnue , pourroient servir à déterminer toutes les autres quantités , il s'en trouve deux qui y servent de la même manière , en sorte qu'on prévoie que l'une ou l'autre conduiroit à la même équation (aux signes + ou — près) ; alors , on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre , mais de prendre pour inconnue une autre quantité qui dépende également de l'une & de l'autre de ces deux-là ; par exemple , de prendre*

pour inconnue leur demi - somme , ou leur demi-différence , ou un moyen proportionnel entre elles , ou &c. On arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre.

La question que nous avons résolue (270) peut nous en fournir un exemple. Rien dans cette question ne déterminoit à prendre AD (fig. 25) pour inconnue plutôt que AE ; en prenant AD pour l'inconnue x , on avoit $x + c$ pour AE ; & en prenant AE pour l'inconnue x , on auroit eu $x - c$ pour AD , & du reste le calcul est le même dans chaque cas , enforte que l'équation ne différera que par les signes. C'est pourquoi , si au lieu de prendre aucune des deux pour inconnue , je prends leur demi - somme , & que je la nomme $2x$; comme leur différence DE est donnée , par les conditions de la question , & est $= c$, on aura (*Géom.* 301) $AE = x + \frac{1}{2} c$, & $AD = x - \frac{1}{2} c$; & en employant le même principe que nous avons employé dans cette première résolution , nous aurons l'équation $(x + \frac{1}{2} c)(x - \frac{1}{2} c) = ab$, ou $xx - \frac{1}{4} cc = ab$, équation plus simple & qui donne $x = \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab}$. D'où il est aisé de conclure que AE qui est $x + \frac{1}{2} c$, sera $= \frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab}$, & $AD = -\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab}$, comme ci-dessus (270).

La question suivante nous fournira plusieurs exemples de l'application du même principe.

274. *D'un point D (fig. 27) situé dans l'angle droit IAE, & également éloigné des deux côtés IA & AE, mener une ligne droite DB, de manière que la partie CB comprise dans l'angle droit EAB, soit égale à une ligne donnée.*

Ayant abaissé les perpendiculaires DE , DI , je puis indifféremment prendre pour inconnue CE ou AB , AC ou IB , CD ou DB . Si je prends, par exemple, CE pour l'inconnue, alors nommant CE , x ; & désignant par a , chacune des deux lignes égales DE , DI qui sont censées connues; nommant de plus, c , la ligne donnée à laquelle BC doit être égale, j'aurai $AC = AE - CE = a - x$; & les triangles semblables DEC , CAB , me donneront AB par cette proportion, $CE : DE :: AC : AB$; c'est-à-dire, $x : a :: a - x : AB$; d'où l'on tire $AB = \frac{aa - ax}{x}$. Or par la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) on a $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$: substituant, au lieu de ces lignes, leurs valeurs algébriques, on aura $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x} \right)^2 = cc$, ou $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$, ou, en chassant le dénominateur, transposant & réduisant $x^4 - 2ax^3 +$

$2axx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; équation du quatrième degré, mais qui n'est pas, à beaucoup près, la plus simple qu'on puisse employer pour résoudre cette question.

Si, au lieu de prendre CE pour inconnue, nous prenions IB , alors nommant IB , x , & imitant la solution précédente, on auroit une équation qui ne différeroit de celle qu'on vient de trouver, qu'en ce qu'au lieu de $a - x$, on auroit $x - a$; c'est-à-dire, qui seroit absolument la même, puisque ces quantités y sont au quarré. Celle où l'on prendroit AB pour inconnue, ne différeroit que par les signes de celle où l'on prendroit AC pour inconnue. A l'égard de DB & de DC , l'équation où l'une sera prise pour inconnue, ne différera que par les signes, de celle où l'on prendroit l'autre pour inconnue: il ne faut donc prendre aucune de ces lignes.

Mais si nous prenons pour inconnue, la somme des deux lignes DB & DC , & si nous représentons cette somme, par $2x$, alors (*Géom.* 301) nous aurons $DB = x + \frac{1}{2}c$, & $DC = x - \frac{1}{2}c$; or les parallèles DI & CA , nous donnent, pour trouver AB & AC , les deux proportions suivantes, $DC:CB::IA$ ou $DE:AB$, & $DB:CB::DI:AC$; c'est-à-dire, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, & $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; donc $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$ & $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; donc

puisque le triangle rectangle CAB , donne $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, on aura $\frac{a^2 c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2 c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$; ou bien, chassant les fractions, & divisant par cc , $a^2 (x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2 (x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2 (x - \frac{1}{2}c)^2$; faisant les opérations indiquées, transposant & réduisant, on a $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{4}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation du quatrième degré, à la vérité, mais plus facile à résoudre que la précédente, puisque (173) elle se résout à la manière de celles du second degré.

On parviendra encore à des équations assez simples, si on emploie deux inconnues, dont l'une soit la somme des deux lignes AB & AC , & l'autre leur différence, c'est-à-dire, si l'on fait $AB + AC = 2x$, & $AB - AC = 2y$, ce qui donnera $AB = x + y$, & $AC = x - y$; le triangle rectangle ABC donnera $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, & les triangles semblables ABC , IBD donneront (Géom. 109) $AB : AC :: IB : ID$; ce qui donnera les deux équations nécessaires pour déterminer x & y ; de l'une on tirera la valeur de xx , qui étant substituée dans l'autre, donnera pour y , une équation du second degré. Mais nous laissons aux Commençans à achever ce calcul pour s'exercer, & nous revenons à notre équation.

Conformément à ce qui a été enseigné (173), on aura $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 =$

$(\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; tirant la racine quarrée, $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm \sqrt{aacc + a^4}$, & par conséquent $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}$: tirant de nouveau la racine quarrée, nous aurons enfin $x = \pm \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}]}$ ou $x = \pm \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm a \sqrt{cc + aa}]}$.

Des quatre valeurs de x que donne la double combinaison des deux signes \pm , il n'y en a qu'une qui appartienne à la question telle qu'elle a été proposée, & cette valeur est $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa + a \sqrt{cc + aa}]}$.

La valeur $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa - a \sqrt{cc + aa}]}$ résout la question pour le cas où l'on demanderoit que la ligne CB fût dans le même angle que le point D , voyez (*fig. 28*); & alors x représente, non pas la demi-somme, mais la demi-différence des deux lignes BD & DC ; c'est ce dont il est facile de se convaincre en nommant $2x$ cette différence, & résolvant le problème de la même manière que ci-dessus; car on aura $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$, & les parallèles DI & CA donneront $DB:CB::DI:CA$, & $DC:CB::AI:AB$, ou $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, & $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; donc $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$ & $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; donc à cause du triangle rectangle CAB , on aura $\frac{a^2 c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2 c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$, ou après

les mêmes opérations que ci - dessus , $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation qui est absolument la même que celle que nous venons de trouver pour la somme des deux lignes BD & CD (*fig. 27*). Donc la même équation satisfaisant aux deux cas, l'une des racines doit donner la somme, & une autre doit donner la différence; or il est facile de voir que les deux que l'on doit prendre, sont celles que nous venons d'indiquer, puisque les deux autres racines, étant toutes négatives, ne peuvent appartenir qu'à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.

Quant à ces deux autres racines, pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins, dans l'équation, si le point D (*fig. 27*) est (comme on l'a supposé d'abord) au-dessous de AI & à gauche de AE , ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première & à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de $A'I'$ & de $A'E'$; or dans ce cas, la quantité a tombant de côtés opposés à ceux où elle tomboit d'abord, est négative; donc on aura la solution qui convient à ce cas, si l'on met $-a$ au lieu de $+a$ dans l'équation $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2$, &c. trouvée ci-dessus; mais comme cette équation ne change pas alors, il s'en suit que cette même équation doit aussi résoudre ces deux nouveaux cas. Donc les deux autres valeurs de x sont l'une, la somme des deux lignes $DB' DC$ (*fig. 27*), & l'autre, leur différence (*fig. 28*). Et l'on voit en effet

que dans cette nouvelle position, les points B & C tombent de côtés opposés à ceux où ils tomboient d'abord, & que par conséquent la somme, ainsi que la différence des deux lignes DB' & DC' doit être négative, comme l'équation les donne en effet.

Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée (*fig. 27 & 28*), la partie $AN = c$, & ayant tiré IN , on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K : sur DK comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN on tirera IH que l'on portera de I en M (*fig. 27*), & on aura LM pour la première valeur de x ; mais dans la figure 28, on décrira du point L comme centre, & d'un rayon égal à IH , un petit arc qui coupe IK en M , & IM fera la seconde valeur de x ; & puisqu'on a $BD = x + \frac{1}{2}c$, on aura $BD = LM + AH$ (*fig. 27*), & $BD = IM + AH$ (*fig. 28*); ainsi il n'y aura plus qu'à décrire du point D comme centre, & du rayon BD qu'on vient de déterminer, un arc qui coupe IA prolongée en quelque point B , la droite DB sera telle qu'on la demande. En effet, le triangle rectang'e IAN (*fig. 27 & 28*) donne IN ou $IK = \sqrt{IA^2 + AN^2} = \sqrt{aa + cc}$, & puisque LI est moyenne proportionnelle entre DI & IK , on a $IL^2 = DI \times IK = a \sqrt{aa + cc}$, or le

triangle rectangle IAH donne IH ou $MI = \sqrt{IA^2 + AH^2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc}$ & le triangle rectangle LIM donne (*figure 27*) $LM = \sqrt{MI^2 + IL^2} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{aa + cc}]}$ $= x$; & (*fig. 28*) $IM = \sqrt{LM^2 - IL^2} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{aa + cc}]} = x$.

Il faut remarquer au sujet de cette dernière valeur, que la construction que nous venons d'en donner, suppose que IH (*fig. 28*) est plus grand que LI , ou tout au plus égal. S'il étoit plus petit, la question seroit impossible pour ce dernier cas ; c'est ce que fait voir aussi l'Algèbre ; car dans la valeur $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{aa + cc}]}$, si $aa + \frac{1}{4}cc$, qui est $(IH)^2$, est plus petit que $a\sqrt{aa + cc}$ qui est $(IL)^2$, la quantité que couvre le radical supérieur, sera négative, & par conséquent la valeur de x sera imaginaire.

En prenant pour inconnue la somme des deux lignes DB & DC (*fig. 27*) ou leur différence (*fig. 28*) nous sommes arrivés à une équation plus simple qu'en prenant CE , ou AC , ou AB , ou IB , parce que la relation des lignes DB & DC aux lignes IB & AB est semblable à celle que les mêmes lignes DB & DC ont avec les lignes AC & CE , c'est-à-dire, qu'elles peuvent être déterminées par des opérations semblables en employant

IB & AB , ou AC & CE . En général, comme l'équation doit renfermer tous les différens rapports que la quantité cherchée peut avoir avec celles dont elle dépend, cette équation sera toujours d'autant plus simple que la quantité qu'on choisira pour inconnue, aura moins de rapports différens avec les autres; en voici un exemple bien sensible dans cette autre solution de la même question.

275. Puisque l'angle CAB (*fig. 29*) est droit, si l'on conçoit que sur CB comme diamètre on décrive un cercle, il passera par le point A : tirons la ligne DA qui prolongée rencontre la circonférence en M ; alors il est aisé de voir que puisque les lignes DI & DE sont égales l'angle DAI ou son égal BAM sera de 45 degrés; & puisque ce dernier a pour mesure la moitié de l'arc MB (*Géom. 63*), cet arc MB sera donc de 90° ; donc si l'on tire le rayon LM , le triangle DLM sera rectangle, & par conséquent en abaissant sur DM , la perpendiculaire LN , le côté LM (*Géom. 112*) sera moyen proportionnel entre DM & MN , ou entre DM & AN , puisque la perpendiculaire LN rend $AN = NM$ (*Géom. 52*). De-là il est aisé d'avoir une solution très-simple, en prenant AN pour inconnue.

Représentons par x cette ligne AN , & nommons

d la ligne DA qui est censée connue ; alors DM sera $d + 2x$, & puisqu'on a (selon ce qui vient d'être remarqué) $DM : LM :: LM : MN$, on aura $d + 2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, & par conséquent $dx + 2xx = \frac{1}{4}cc$, ou $xx + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{8}cc$; & en résolvant cette équation, $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{8}cc\right)}$.

Pour construire cette quantité, je l'écris ainsi $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc\right)}$. Je prends sur les côtés Ao , AI de l'angle droit IAo , les parties Am , An égales chacune à $\frac{1}{4}c$, & achevant le quarré $Am pn$, je tire la diagonale Ap qui sera perpendiculaire à DA , & égale à $\sqrt{\left(\frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc\right)}$: je prends sur AD , la partie Ar égale à $\frac{1}{4}d$ ou $\frac{1}{4}AD$, & tirant pr , j'ai $pr = \sqrt{[Ar^2 + (Ap)^2]} = \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc\right)}$; il ne s'agit donc plus, pour avoir la première valeur de x , que de retrancher de pr la quantité $\frac{1}{4}d$, ce qui se fera en décrivant du point r comme centre, & du rayon rp un arc qui coupe DM en N , ce qui donne AN pour la première valeur de x ; enforte qu'élevant au point N la perpendiculaire NL que l'on coupera en L par un arc décrit du point A comme centre, & du rayon $\frac{1}{2}c$, on aura le point L par lequel & par le point D tirant DCB , on aura la solution.

Quant à la seconde valeur de x , savoir $x =$

$\frac{1}{4}d - \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$, on l'aura en portant rp de r en N' , car alors AN' étant égale à $Ar + rN'$ vaudra $\frac{1}{4}d + \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$, c'est-à-dire, fera égale à la seconde valeur de x en changeant les signes; & comme elle tombe du côté opposé à la première, elle fera, eu égard à tout, la véritable valeur de x dans ce second cas. On élèvera donc aussi au point N' la perpendiculaire $N'L'$ que l'on coupera en L' par un arc décrit pareillement du point A comme centre & d'un rayon égal à $\frac{1}{2}c$; alors tirant par le point L' & par le point D la droite $B'L'D$, on aura la seconde solution dont la question peut être susceptible: c'est ce dont il est aisé de se convaincre en jettant les yeux sur la figure 30, & y appliquant mot à mot ce que nous avons dit de la figure 29 au commencement de cette solution: on verra qu'en nommant AN ou MN , x , & conservant les autres dénominations les mêmes, on aura $DM : ML :: ML : MN$; c'est-à-dire, $2x - d : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, & par conséquent, $2xx - dx = \frac{1}{4}cc$; d'où l'on tire $x = \frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc\right)}$ dont une des valeurs est précisément la même que celle dont il s'agit; les signes seulement sont différens, ainsi que cela doit être.

Mais il se présente ici une remarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra

décrire du point A (*fig.* 29) comme centre , & du rayon $\frac{1}{2} c$, ne rencontre pas la perpendiculaire $N'L'$, parce que la quantité $\frac{1}{2} c$ peut être plus petite que AN' . Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étoient impossibles , l'Algèbre le faisoit connoître : cependant , dans l'équation $x = -\frac{1}{4} d - \sqrt{\left(\frac{1}{16} dd + \frac{1}{16} c^2 + \frac{1}{16} c^2\right)}$, rien ne manifeste dans quels cas cette impossibilité a lieu ; car tout est nécessairement positif sous le radical.

Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu'une question exprimée algébriquement , sera impossible , l'Algèbre manifestera cette impossibilité ; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsqu'on aura exprimé par cette même Algèbre , tout ce que la question suppose , soit explicitement , soit implicitement ; or c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet , la question suppose tacitement que les trois points D, A, L , ne sont pas sur une même ligne droite , & c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement ; nous avons exprimé que LM étoit moyenne proportionnelle entre DM & NM , propriété qui appartient à la vérité au triangle rectangle , mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points D, A, L sont supposés en ligne droite. En effet , il est évident qu'on peut se proposer cette question : *Trouver*

sur

sur la direction DL (fig. 31), quel intervalle il faudroit laisser entre les deux droites DA & ML de grandeurs connues, pour que ML soit moyenne proportionnelle entre DM & MN , le point N étant le milieu de AM . Or cette question conduit (comme il est facile de s'en assurer) précisément à la même équation que ci-dessus, & cette équation donne deux solutions, l'une pour le cas où les deux points A & M sont entre D & L ; l'autre, pour le cas contraire. Il n'est donc pas étonnant que lorsque la première question devient impossible (du moins dans un de ces cas) l'Algèbre n'en dise rien; puisqu'elle doit donner la solution de cette seconde question qui est toujours possible.

276. Cette réflexion nous porte donc à distinguer deux sortes de questions, savoir, les questions *concrètes* & les questions *abstraites*. Par les premières, on doit entendre les questions de la nature de l'avant-dernière, où ce que l'on cherche est spécifié ou particularisé par quelque condition, quelque propriété, ou quelque construction particulière, que l'équation n'exprime point. Les questions abstraites, au contraire, seront celles où les quantités sont considérées uniquement comme quantités, & où l'équation exprime tout ce que la question renferme, comme dans la dernière question. Celles-ci peuvent toujours

avoir autant de solutions , soit positives , soit négatives , que l'équation a de solutions réelles : au lieu que le nombre des solutions d'une question concrète est souvent moindre que le nombre des solutions , même positives , de l'équation ; la question suivante qui est de cette dernière espèce , nous en fournira un exemple.

277. Supposons que $ABED$ (*fig. 32*) représente une sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABE autour du diamètre AE . Le secteur ABC , dans ce mouvement , engendre un secteur sphérique qui est composé d'un segment sphérique engendré par la rotation du demi-segment ABP , & d'un cône engendré par le triangle rectangle BPC . Supposons qu'on demande en quel endroit le segment sphérique & le cône seront égaux entre eux.

Pour résoudre cette question , il faut se rappeler (*Géom. 247*) que le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte BAD par le tiers du rayon AC . Or la surface de la calotte (*Géom. 225*) se trouve en multipliant la circonférence $ABDE$ par la hauteur AP de cette calotte. Donc si on représente par le rapport de $r : c$, le rapport du rayon d'un cercle à sa circonférence , & si l'on nomme AC , a ; AP , x ; on aura la circonférence $ABDE$ par cette proportion $r : c :: a : ABDE$ qui fera donc $\frac{c \cdot a}{r}$; donc la surface de

la calotte fera $\frac{cax}{r}$, & par conséquent, la solidité du secteur fera $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ou $\frac{caax}{3r}$.

Pour avoir la solidité du cône, il faut multiplier la surface du cercle qui lui sert de base, c'est-à-dire, la surface du cercle qui a pour rayon BP , par le tiers de la hauteur CP : or puisque $CP = CA - AP = a - x$, & que $CB = a$, on aura dans le triangle rectangle BPC , $BP = \sqrt{CB^2 - PC^2} = \sqrt{aa - aa + 2ax - xx} = \sqrt{2ax - xx}$; mais pour avoir la surface du cercle qui a pour rayon BP , il faut multiplier sa circonférence par la moitié du rayon, & pour avoir cette circonférence, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion $r : c :: \sqrt{2ax - xx}$ est à un quatrième terme qui fera $\frac{c\sqrt{2ax - xx}}{r}$; multipliant donc par la moitié du rayon $\sqrt{2ax - xx}$, on aura $\frac{c \cdot (2ax - xx)}{2r}$ pour la surface de la base du cône, multipliant cette surface par le tiers de la hauteur CP , c'est-à-dire, par $\frac{a-x}{3}$, on aura $\frac{c \cdot (2ax - xx)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$ pour la solidité du cône; or pour que le cône soit égal au segment, il faut que le secteur qui est la somme des deux, soit double de l'un ou de l'autre, il faut donc que $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}$, ou $\frac{caax}{3r} = \frac{c \cdot (2ax - xx) \cdot (a-x)}{3r}$, en supprimant 2, facteur commun du numérateur &

du dénominateur ; telle est l'équation qui résoudra la question. On peut simplifier cette équation en supprimant $3r$, qui est diviseur commun, & cx qui est multiplicateur commun des deux membres ; alors on aura $aa = (2a - x) \cdot (a - x)$, ou $xx - 3ax = -aa$; d'où l'on tire , selon les règles de la première section , $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$; or de ces deux solutions, il n'y a que $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$ qui puisse satisfaire, puisqu'il est évident que $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$ valant plus que $2a$, c'est-à-dire, plus que le diamètre, la solution qu'elle indique ne peut convenir à la sphère.

Si l'on veut construire la solution $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$, on lui donnera cette forme $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{2}{4}aa - aa\right)}$; & ayant pris $AM = \frac{3}{2}a$, on décrira sur AM comme diamètre le demi-cercle AOM , & ayant inscrit la corde AO égale à a , on tirera OM que l'on portera de M en P vers A ; le point P où elle aboutira , déterminera la hauteur AP ou x . En effet, à cause du triangle rectangle AOM , on a OM ou $PM = \sqrt{(AM^2 - AO^2)} = \sqrt{\left(\frac{2}{4}aa - aa\right)}$; donc $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{2}{4}aa - aa\right)} = x$.

Quant à la seconde solution $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$, elle n'appartient point, ainsi que nous venons de le dire, à la question présente ; mais elle appartient, ainsi que la première, à cette autre question abstraite

que la lecture de l'équation $xx - 3ax = -aa$, ou $3ax - xx = aa$, fournit : *La ligne connue AN (fig. 33) étant partagée en trois parties égales aux points B & D, trouver sur la direction de cette ligne un point P, tel que la partie AD soit moyenne proportionnelle entre les distances du point P aux extrémités A & N.* En effet, si l'on nomme a le tiers AD de la ligne connue AN , & AP , x , on aura $PN = 3a - x$; & les conditions de la question donnent cette proportion $x : a :: a : 3a - x$, d'où l'on tire cette équation $3ax - xx = aa$, dont les deux racines sont $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$ comme ci-dessus; on les aura toutes deux aussi par la même construction, excepté que pour la seconde, c'est-à-dire, pour $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$, on portera MO de M en P' vers N , & alors AP & AP' seront les deux valeurs de x .

Autres applications de l'Algèbre, à divers objets.

278. Pour résoudre la dernière question, nous avons été obligés de calculer l'expression algébrique d'un secteur sphérique & du cône qui en fait partie. Les corps que nous avons considérés en Géométrie, reviennent souvent dans plusieurs questions, & principalement dans les questions Physico-mathématiques, parce qu'ils sont les élémens de tous les autres. Il est

donc à propos de se familiariser avec les expressions algébriques, soit de leur totalité, soit de leurs parties. Outre que cela sera utile dans la quatrième partie de ce Cours, cela nous fournira encore l'occasion de faire voir l'utilité de l'Algèbre pour la comparaison de ces corps, & pour la mesure de ceux qu'on peut y rapporter.

Si l'on représente en général par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle [rapport que l'on connoît avec une exactitude plus que suffisante (*Géom.* 152) pour la pratique] ; alors la circonférence de tout autre cercle dont le rayon seroit a , fera $\frac{c a}{r}$, & sa surface $\frac{c a}{r} \times \frac{1}{2} a$, ou $\frac{c a^2}{2 r}$.

On voit par-là que les surfaces des cercles croissent comme les quarrés de leurs rayons ; car $\frac{c}{2 r}$ étant toujours de même valeur, la quantité $\frac{c a^2}{2 r}$ ne croît qu'à proportion de ce que croît a^2 .

Si h est la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base est a , on aura (*Géom.* 237) $\frac{c a^2}{2 r} \times h$ pour sa solidité ; par la même raison, on aura $\frac{c a'^2}{2 r} \times h'$, pour la solidité d'un autre cylindre dont la hauteur seroit h' & dont le rayon de la base seroit a' ; enforte que les solidités de ces deux cylindres seront entre elles $:: \frac{c a^2}{2 r} \times h : \frac{c a'^2}{2 r} \times h'$,

ou $:: a^2 h : a'^2 h'$, en supprimant le facteur commun $\frac{c}{2r}$; c'est-à-dire, que les solidités des cylindres sont comme les produits de leurs hauteurs par les quarrés des rayons de leurs bases. Si les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, alors on a $h : h' :: a : a'$, & par conséquent $h' = \frac{h a'}{a}$; & le rapport $a^2 h : a'^2 h'$ devient $a^2 h : \frac{a'^3 h}{a}$, ou, (en supprimant le facteur commun h , multipliant par a , & supprimant le dénominateur a) devient $a^3 : a'^3$; c'est-à-dire, qu'alors les solidités sont comme les cubes des rayons des bases.

En général les surfaces, comme nous l'avons vu en Géométrie, dépendent du produit de deux dimensions, & les solides du produit de trois dimensions; ainsi si chaque dimension de l'un de deux solides ou de deux surfaces que l'on compare, est à chaque dimension de l'autre, dans le même rapport, ces deux surfaces seront entre elles comme les quarrés, & ces deux solides seront comme les cubes de deux dimensions homologues; & plus généralement encore, si deux quantités quelconques de même nature sont exprimées par le produit de tant de facteurs qu'on voudra, & si chaque facteur de l'une est à chaque facteur de l'autre, dans un même rapport, ces deux quantités seront entre elles

comme un facteur homologue de chacune, élevé à une puissance d'un degré égal au nombre de ces facteurs. Par exemple, si une quantité est exprimée par $abcd$ & une autre par $a'b'c'd'$, auquel cas ces deux quantités sont l'une à l'autre $:: abcd : a'b'c'd'$, alors si l'on a $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on tirera des proportions que donnent ces rapports, $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, & par conséquent le rapport $abcd : a'b'c'd'$ deviendra $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$, ou $a : \frac{a'^4}{a^3}$, ou $a^4 : a'^4$.

La même chose auroit lieu, quand même ces quantités ne seroient pas exprimées par des monomes; si, par exemple, elles étoient exprimées, l'une par $ab + cd$, & l'autre par $a'b' + c'd'$, dans le cas où les dimensions de la première seront proportionnelles aux dimensions de la seconde, ces quantités seront l'une à l'autre $:: a^2 : a'^2$; en effet, puisqu'on suppose que $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on aura $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, & par conséquent le rapport $ab + cd : a'b' + c'd'$ deviendra $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$, ou $ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2}$, ou $a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd)$, ou enfin $a^2 : a'^2$.

Cette dernière observation démontre d'une manière générale, que les surfaces des figures semblables sont

comme les quarrés de deux de leurs dimensions homologues, & les solidités des solides semblables comme les cubes ; car quelles que soient ces figures ou ces solides , les premières peuvent toujours être considérées comme composées de triangles semblables dont les hauteurs & les bases sont proportionnelles dans chaque figure ; & les derniers peuvent être considérés comme composés de pyramides semblables dont les trois dimensions sont aussi proportionnelles.

On voit par-là comment on peut comparer facilement les quantités, lorsqu'on en a l'expression algébrique , & cela , soit que ces quantités soient de même espèce ou d'espèce différente comme un cône & une sphère , un prisme & un cylindre , pourvu seulement qu'elles soient de même nature , c'est-à-dire , ou toutes deux des solides , ou toutes deux des surfaces, ou toutes deux , &c.

279. Nous avons dit (*Géom.* 243) comment on devoit s'y prendre pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée ou d'un cône tronqué. Si donc on nomme h la hauteur de la pyramide entière, & h' la hauteur de la pyramide retranchée; s la surface de la base inférieure, & s' celle de la base supérieure, on aura (*Géom.* 202) $s : s' :: h^2 : h'^2$; & par conséquent $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$ ou $h' = h \sqrt{\frac{s'}{s}}$; mais si on nomme k la hauteur du tronc, on aura $k = h - h'$, & par conséquent $k = h - h \sqrt{\frac{s'}{s}}$ ou $k = \frac{h \sqrt{s} - h \sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$;

d'où l'on tire $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. Or la solidité de la pyramide totale est $s \times \frac{h}{3}$, & celle de la pyramide retranchée est $s' \times \frac{h'}{3}$, ou (en mettant pour h' la valeur qu'on vient de trouver) $s' \times \frac{h}{3} \sqrt{\frac{s'}{s}}$; donc la solidité du tronc fera $\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}$ ou $\frac{h}{3} \cdot \left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \right)$, ou enfin $\frac{h}{3} \cdot \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \right)$; mettons donc pour h la valeur que nous venons de trouver, & nous aurons $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, qui se réduit à $\frac{k}{3} \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}} \right)$, ou, en faisant la division par $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$, se réduit à $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$, qui nous apprend que toute pyramide ou tout cône tronqué est composé de trois pyramides de même hauteur, dont l'une a pour base la base inférieure s du tronc, l'autre la base supérieure s' & la troisième, une moyenne proportionnelle $\sqrt{ss'}$, entre la base supérieure s' & la base inférieure s ; car pour avoir la solidité de ces trois pyramides, il suffiroit, puisqu'elles sont de même hauteur, de réunir les trois bases, ce qui donneroit $s + \sqrt{ss'} + s'$, & de multiplier la totalité par le tiers $\frac{k}{3}$ de la hauteur commune, ce qui donne la même quantité qu'on vient de trouver.

280. Si a représente le rayon d'une sphère, $\frac{ca^2}{2r}$ fera la surface de son grand cercle; $\frac{4ca^2}{2r}$ ou $\frac{2ca^2}{r}$ fera la surface de cette même sphère, & par conséquent $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3} a$, ou $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ fera la solidité (*Géom.* 222 & 244).

Si l'on nomme x la hauteur d'un segment quelconque, on aura, comme nous l'avons vu dans la solution de la dernière question, $\frac{c a a x}{3 r}$ pour la solidité du secteur, & $\frac{c}{2 r} \times (2 a x - x x) \times \frac{a - x}{3}$ pour celle du cône qui en fait partie; donc celle du segment (*Géom.* 248) sera $\frac{c a a x}{3 r} - \frac{c}{2 r} \cdot (2 a x - x x) \cdot \frac{a - x}{3} = \frac{c}{3 r} \cdot \frac{2 a a x - 2 a a x + a x x + 2 a x x - x^3}{2} = \frac{c}{3 r} \cdot \frac{3 a x x - x^3}{2} = \frac{c x^2}{2 r} \times (a - \frac{1}{3} x)$ qui fait voir que la solidité du segment est égale au cercle qui auroit pour rayon la hauteur de ce segment, multiplié par le rayon moins le tiers de cette hauteur.

Quand on a les expressions algébriques des quantités, il est facile de résoudre plusieurs questions qu'on peut faire sur ces mêmes quantités.

Par exemple, si l'on demandoit quelle doit être la hauteur d'un cône qui seroit égal en solidité à une sphère donnée, & qui auroit pour rayon de sa base le rayon de la sphère: en nommant h cette hauteur & a le rayon de la base, on aura $\frac{c}{2 r} \times \frac{a^2 h}{3}$ pour la solidité de ce cône; & puisqu'il doit être égal à la sphère qui a aussi pour rayon a , on aura $\frac{c}{2 r} \times \frac{a^2 h}{3} = \frac{c}{2 r} \times \frac{4 a^3}{3}$, d'où l'on tire $h = 4 a$, en effaçant, dans chaque membre, le facteur commun $\frac{c}{2 r} \times \frac{a^2}{3}$.

Cette valeur de h nous fait connoître que la hauteur doit être double du diamètre de la sphère, ce qui doit être en effet; car la sphère étant (*Géom.* 256) les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, doit être le double d'un cône de même base & de même hauteur que ce cylindre, c'est-à-dire, égale à un cône de même base & d'une hauteur double.

281. Pour donner encore un exemple, proposons-nous cette question: *Connoissant le poids d'une sphère dans l'air, & son poids dans l'eau, connoître le rayon de cette sphère.*

Pour résoudre cette question nous supposerons un principe d'hydrostatique que nous démontrerons dans la quatrième Partie de ce Cours. Ce principe est que ce qu'un corps perd de son poids dans l'eau ou dans tout autre liquide, est égal au poids du volume de liquide qu'il déplace. Cela posé, supposons que p est le poids d'un ponce cube d'eau, & x le rayon inconnu de la sphère dont il s'agit: c'est-à-dire, le nombre de ponces de ce rayon. La solidité de cette sphère sera donc $\frac{2cx^3}{3r}$; & pour avoir le poids d'un pareil volume d'eau, il faudra multiplier cette quantité par p , puisqu'un ponce cube d'eau pesant p , un nombre de ponces cubes d'eau exprimé par $\frac{2cx^3}{3r}$ doit peser p de fois autant; c'est-à-dire, qu'il doit peser $\frac{2pcx^3}{3r}$; supposons donc que P est le poids qu'a, dans l'air, la sphère en question; alors selon le principe que nous venons de poser, elle ne doit peser dans l'eau, que $P - \frac{2pcx^3}{3r}$; puis donc qu'on suppose connoître ce qu'elle pèse dans l'eau, si l'on représente ce poids par P' , on aura $P - \frac{2pcx^3}{3r} = P'$; & par

conséquent $\frac{2cp x^3}{3r} = P - P'$ ou $x^3 = \frac{(P - P') \times 3r}{2cp}$;

tirant la racine cubique $x = \sqrt[3]{\frac{(P - P') \times 3r}{2cp}}$.

Supposons, pour en donner une application, que la sphère dont il s'agit pèse 5 onces dans l'air & 2 onces dans l'eau; & qu'un pied cube d'eau pèse 72 livres, ce qui donne (en divisant par 1728 qui est le nombre des pouces contenus dans un pied cube) $\frac{72}{1728}$ ou $\frac{1}{24}$ de livre, c'est-à-dire, $\frac{16}{24}$ ou $\frac{2}{3}$ d'once pour un pouce cube : prenons d'ailleurs le rapport de 113 à 355 pour celui du diamètre à la circonférence, & par conséquent, celui de $\frac{113}{2}$ à 355 pour celui de r à c ; nous aurons donc $p = \frac{2}{3}$, $P = 5$, $P' = 2$, $r = \frac{113}{2}$, $c = 355$, & par conséquent.

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{(5 - 2) 3 \cdot \frac{113}{2}}{2 \cdot 355 \cdot \frac{2}{3}}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{1017}{2}}{\frac{1420}{3}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3051}{2840}}$$

ou (en prenant les logarithmes, pour plus de facilité) $Lx = \frac{1}{3} L \frac{3051}{2840} = \frac{1}{3} (L 3051 - L 2840)$; or $L 3051 = 3,4844422$ & $L 2840 = 3,4533183$; retranchant & prenant le tiers du reste, on a $Lx = 0,0103746$ qui répond à 1,0242 à très-peu près: ce globe a donc un pouce & 0,0242, ou 1 pouce & 242 dix-millièmes de pouce, pour rayon.

Nous avons supposé tacitement que le globe entroit entièrement dans l'eau, par son poids; si au contraire il falloit lui ajouter un certain poids pour le faire plonger entièrement, alors ce seroit cette quantité qu'il faudroit prendre pour P' , mais en même temps, il faudroit traiter P' comme négatif; c'est à-dire, qu'alors on auroit.

$$x = \sqrt[3]{\frac{(P + P') \times 3r}{2cp}}. \text{ En effet, } \frac{2cp x^3}{3r} \text{ étant (ainsi}$$

que nous l'avons vu dans la solution précédente) le poids d'un volume d'eau égal à ce globe, & P le poids de ce

globe dans l'air, $\frac{2cp x^3}{3r}$ — P sera la quantité dont il pèse moins qu'un pareil volume d'eau, & par conséquent, ce qu'il faut ajouter pour le faire plonger entièrement; on aura donc $\frac{2cp x^3}{3r} - P = P'$, qui donne la valeur de x que nous venons d'assigner pour ce cas.

Des Lignes courbes en général ; & , en particulier , des Sections coniques.

282. La considération des lignes courbes n'est point un objet de pure spéculation. Tant que les questions qu'on a à résoudre ne passent pas le second degré, on n'a pas besoin du secours de ces lignes; mais au-delà elles deviennent nécessaires. Nous allons donc donner une idée générale des lignes courbes, & des usages qu'elles peuvent avoir pour la construction des équations auxquelles on arrive dans la résolution des questions.

Parmi les lignes courbes que l'on considère en Géométrie, les unes sont telles que chacun de leurs points peut être déterminé par une même loi; c'est-à-dire, par des calculs & des opérations semblables: dans d'autres, chaque point se détermine par une loi différente, c'est-à-dire, par des calculs ou des opérations différentes; mais cette différence elle-même est assujettie à une loi.

Quant aux lignes tracées au hasard, telles que

seroient par exemple , les traits qu'imprime sur le papier , la plume d'un écrivain , ils ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureuse. Néanmoins les recherches dont celle-ci s'occupe conduisent même à imiter , par des procédés directs & certains , des contours qui ne semblent assujettis à aucune loi : & l'art de lier ainsi , par des rapports approchés , des quantités dont la loi véritable seroit ou inconnue ou trop composée , n'est pas une des applications les moins utiles de la Géométrie & de l'Algèbre ; nous aurons quelques occasions de le voir par la suite.

Pour pouvoir tracer les lignes courbes qui font l'objet de la Géométrie , il faut donc connoître la loi à laquelle sont assujettis les différens points de leur contour. Or cette loi peut être donnée de plusieurs manières : ou en indiquant un procédé par lequel ces courbes peuvent être décrites d'un mouvement continu : tel est le cercle qui se décrit en faisant tourner dans un plan , une ligne donnée , & autour d'un point donné. Ou bien en faisant connoître quelque propriété qui appartienne constamment à chacun des points de cette courbe : c'est ainsi que sachant , que tout angle qui a son sommet à la circonférence du cercle , & qui s'appuie sur un diamètre , est droit , je puis trouver successivement chacun des points d'un cercle dont je

connois le diamètre, en tirant d'une des extrémités A de ce diamètre (*fig. 34*) une infinité de lignes droites AC , AD , AE , AF , & menant de l'autre extrémité B , les perpendiculaires BC , BD , BE , BF ; les différens points C , D , E , F , &c. déterminés de cette manière appartiendront tous à la circonférence qui a AB pour diamètre.

Enfin cette loi peut être donnée par une équation, & on peut toujours supposer qu'elle est donnée par ce dernier moyen, parce que les deux autres dont nous venons de faire mention servent à trouver l'équation qui exprime cette loi. C'est sous ce dernier point de vue que nous allons principalement considérer les courbes. C'est tout à la fois le plus simple & le plus fécond pour en connoître les propriétés, les singularités, & les usages. Voyons donc comment une équation peut exprimer la nature d'une courbe; & puisque jusqu'ici nous ne connoissons encore que la circonférence du cercle, commençons par celle-ci.

283. Supposons donc que AMB (*fig. 35*) est une courbe à laquelle nous ne connoîtrions encore d'autre propriété que celle-ci; que la perpendiculaire PM abaissée d'un point quelconque M de cette courbe, sur la ligne AB , est moyenne proportionnelle entre les deux parties AP & PB . Voyons
comment

comment l'Algèbre peut nous aider à trouver chacun des points de cette courbe, & ses différentes propriétés.

Si je nomme a la ligne AB ; la partie AP , x ; & la perpendiculaire PM , y ; alors PB fera $a - x$; & puisque nous supposons PM moyenne proportionnelle entre AP & PB , nous aurons $x : y :: y : a - x$; & par conséquent, $yy = ax - xx$.

Concevons maintenant que AB soit partagé en un certain nombre de parties égales, en 10 par exemple; & que par chaque point de division on élève des perpendiculaires pm , pm , pm , &c.; il est visible que si, dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on suppose x successivement égal à chacune des lignes Ap , Ap , &c., y deviendra égal à chaque ligne correspondante pm , pm , &c., puisque l'équation $yy = ax - xx$ exprime que y est toujours moyenne proportionnelle entre x & $a - x$, quel que soit d'ailleurs x , ce qui est la propriété que nous supposons à chaque perpendiculaire pm . Donc on peut trouver successivement chacun des points de cette courbe, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, & calculant les valeurs correspondantes de y : en voici un exemple.

Dans la supposition que nous venons de faire, que a est divisé en 10 parties, ou qu'il est composé de 10 parties,

Marine. Algèbre.

Z

nous aurons $x = 10$, & par conséquent l'équation devient $xy = 10x - xx$. Si donc nous supposons successivement $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6, x = 7, x = 8, x = 9, x = 10$; on trouvera successivement $y = \sqrt{9}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{25}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{9}, y = \sqrt{0}$; ou bien $y = 3; y = 4; y = 4, 5; y = 4, 9; y = 5; y = 4, 9; y = 4, 5; y = 4; y = 3; y = 0$. Ainsi, si l'on porte ces valeurs de y successivement sur les perpendiculaires correspondantes aux valeurs 1, 2, 3, &c. de x , les points m, m , déterminés de cette manière appartiendront tous à une courbe qui aura cette propriété que chaque perpendiculaire pm sera moyenne proportionnelle entre les deux parties Ap & pB de la droite AB , courbe que nous allons voir, dans un moment, être la circonférence même du cercle.

Nous avons vu que toute racine paire avoit deux valeurs; l'une positive, l'autre négative. Ainsi outre les valeurs de y que nous venons de trouver, on a encore ces autres-ci, $y = -3; y = -4; y = -4, 5; y = -4, 9; y = -5; y = -4, 9; y = -4, 5; y = -4; y = -3; y = 0$.

Pour avoir les points de la courbe qu'annoncent ces nouvelles valeurs de y , il faut, conformément à ce que nous avons déjà dit plusieurs fois sur les quantités négatives, prolonger les perpendiculaires $pm; pm, \&c.$, & porter à l'opposite, c'est-à-dire, de p en m' , les quantités $pm', pm', \&c.$ égales chacune à sa correspondante pm .

Si l'on veut avoir un plus grand nombre de points de la courbe, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer AB divisé en un plus grand nombre de parties, par exemple en 100; c'est-à-dire, supposer $a = 100$; ou bien en conservant à a la même valeur 10, que ci-dessus, supposer à x des valeurs intermédiaires entre celles qu'on lui a données ci-dessus; on trouvera de même les valeurs intermédiaires de y , & par conséquent de nouveaux points de la courbe.

La valeur $y = 0$, qu'on a trouvée ci-dessus, fait voir que la courbe rencontre la ligne AB au point B , ou $x = a = 10$; puisque la perpendiculaire pm ayant alors pour valeur zéro, la distance du point m à la droite AB est nulle. On peut voir, aussi avec facilité, qu'elle doit rencontrer la ligne AB au point A : en effet puisqu'aux endroits où la courbe rencontre cette ligne, la valeur de y doit être 0; pour savoir quels sont ces endroits, il n'y a qu'à supposer que y est zéro, dans l'équation $yy = ax - xx$, ce qui la réduit à $0 = ax - xx$; or $ax - xx$ étant $= x \times (a - x)$, ce produit est zéro, dans deux cas, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$. Donc réciproquement y sera aussi zéro dans ces deux cas; or x est évidemment $= 0$ au point A , & il est $= a$, au point B ; donc la courbe rencontre en effet la ligne AB , aux points A & B .

D'après cet exemple, on peut commencer à appercevoir comment une équation sert à déterminer

les différens points d'une courbe. Nous en verrons d'autres exemples ; mais auparavant expliquons-nous sur certains mots dont nous ferons usage par la suite.

284. Lorsqu'on veut exprimer , par une équation , la nature d'une ligne courbe , on rapporte , ou l'on conçoit qu'on rapporte chacun des points m , m , &c. à deux lignes fixes AB & $OA O$, qui font entre elles un angle déterminé (aigu , droit ou obtus) ; & en imaginant que de chaque point m on mène les lignes mp & mp' parallèles aux lignes $OA O$ & AB , il est évident qu'on connoîtra la situation de ce point , si l'on connoît les valeurs des lignes mp' ou Ap & pm , ou (ce qui revient au même) si l'on connoît l'une de ces lignes , & son rapport avec l'autre. Or ce que l'on entend , lorsqu'on dit qu'une équation exprime la nature d'une ligne courbe , c'est que cette équation donne le rapport qu'il y a , pour chaque point m , entre la ligne Ap & la ligne pm , en sorte que l'une étant connue ; l'équation fait connoître l'autre , & selon que ce rapport est plus ou moins composé , la courbe est elle-même d'un genre plus ou moins élevé.

Les lignes Ap , ou mp' , qui mesurent la distance de chaque point m à l'une $OA O$ des deux lignes de comparaison , s'appellent les *abscisses* ; &

les lignes mp ou $p'A$ qui mesurent la distance à l'autre ligne AB de comparaison, s'appellent les *ordonnées*; la ligne AB , s'appelle *l'axe des abscisses*, & la ligne OAO , s'appelle *l'axe des ordonnées*. Le point A d'où l'on commence à compter les abscisses, s'appelle *l'origine des abscisses*; on appelle de même *origine des ordonnées*, celui d'où l'on commence à compter les ordonnées Ap' ou pm : dans la figure 35, ces deux points sont un seul & même point, savoir le point A ; rien n'affujettit à compter les abscisses depuis le même point d'où l'on compte les ordonnées; mais quand aucune circonstance ne détermine à faire autrement, il est toujours plus simple de les compter du même point.

Les lignes Ap , pm , se nomment d'un nom commun, *les coordonnées de la courbe*; & considérées comme appartenant indifféremment à un point quelconque de la courbe, on les appelle *des indéterminés*; on donne le même nom aux lettres ou signes algébriques x & y par lesquelles on représente ces lignes Ap & pm .

285. Revenons maintenant à notre équation, & voyons comment on peut en tirer les propriétés de la courbe.

1°. Du milieu C de AB , tirons, à un point

Z 3

quelconque M de la courbe , la droite CM ; en quelque endroit que ce soit , le triangle MPC sera toujours rectangle , & l'on aura , par conséquent , $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, c'est-à-dire , (puisque $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$) , $yy + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; or puisque la droite MP , ou y , est par-tout moyenne proportionnelle entre AP & PB , on a , par-tout , $yy = ax - xx$; on aura donc aussi , par-tout , $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; c'est-à-dire , $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$, qui donne $MC = \frac{1}{2}a$; chaque point M ou m , est donc également éloigné du point C ; la courbe est donc une circonférence de cercle.

2°. D'un point quelconque M ou m de la courbe , menons aux deux extrémités A & B , les droites MA & MB ; les triangles rectangles MPA , MPB , nous donneront $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$, & $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, ou en mettant les valeurs algébriques , $xx + yy = (AM)^2$, & $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$, donc en ajoutant ces deux équations , & mettant pour yy sa valeur $ax - xx$, on aura $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$; c'est-à-dire , $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; propriété du triangle rectangle , & qui par conséquent nous fait connoître que l'angle AMB est toujours droit

en quelque endroit que soit le point M sur la courbe; voyez (*Géom.* 65).

3°. Si dans l'équation $xx + yy = (AM)^2$; on met, pour yy la valeur $ax - xx$, on aura $(AM)^2 = ax$, qui donne cette proportion $a : AM :: AM : x$, ou $AB : AM :: AM : AP$; c'est-à-dire, que la corde AM est moyenne proportionnelle, entre le diamètre AB , & le segment ou l'abscisse AP ; voyez (*Géom.* 112).

On trouveroit de même toutes les autres propriétés du cercle que nous avons démontrées en Géométrie, & cela en partant toujours de cette supposition, que l'ordonnée PM ou pm est moyenne proportionnelle entre AP & PB , ou Ap & pB .

Nous avons compté les abscisses, depuis le point A origine du diamètre, & nous avons eu l'équation $yy = ax - xx$. Si nous voulions compter les abscisses depuis le centre, c'est-à-dire, prendre pour abscisses les lignes CP , Cp , &c.; alors représentant chacune de ces lignes, par z , nous aurions $CP = AC - AP$, c'est-à-dire, $z = \frac{1}{2}a - x$, & par conséquent $x = \frac{1}{2}a - z$. Mettant, donc pour x cette valeur dans l'équation $yy = ax - xx$, on aura $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, qui se réduit à $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, c'est-là l'équation du cercle en

supposant les coordonnées perpendiculaires, & leur origine au centre.

Au reste, toute propriété qui appartiendra essentiellement à chaque point de la courbe, donnera toujours, en la traduisant algébriquement, la même équation pour la courbe; du moins tant qu'on prendra les mêmes abscisses & les mêmes ordonnées; mais quand on changera l'origine, ou la direction des coordonnées, ou toutes les deux, on pourra avoir une équation différente; néanmoins elle sera toujours du même degré. Nous venons de voir la vérité de la dernière partie de cette proposition, dans le changement que nous venons de faire pour les abscisses; au lieu de l'équation $yy = ax - xx$, nous avons eu $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, qui étant déduite de la première, a pour base la même propriété; mais si nous partions de cette autre propriété, que chaque distance MC est toujours la même, & $= \frac{1}{2}a$; alors nommant CP, z ; & PM, y ; nous aurions, à cause du triangle rectangle MPC , $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, qui donne $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, équation qui est la même que tout à l'heure, quoique déduite d'une propriété différente.

De l'Ellipse.

286. Proposons-nous maintenant d'examiner quelle feroit la courbe qui auroit cette autre propriété, que

la somme des deux distances $MF + Mf$ (fig. 36) de chacun de ses points à deux points fixes F & f , feroit toujours égale à une ligne donnée a .

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *Ellipse*, il faut chercher une équation qui exprime quelle relation il y a, en vertu de cette propriété connue, entre les perpendiculaires PM menées de chaque point M sur une ligne déterminée telle que Ff , par exemple, & leurs distances FP ou AP à quelque point F ou A pris arbitrairement.

Dans cette vue, je prends pour origine des abscisses le point A , déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff , la ligne $CA = \frac{1}{2}a$; & ayant fait $CB = CA$, je nomme AP , x ; PM , y ; la ligne AF qui est censée connue, c ; & la ligne FM , z ; alors $FP = AP - AF = (*)x - c$; $Mf = FMf - FM = a - z$, & $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c$.

Cela posé, les triangles rectangles $FP M$, $fP M$, donnent $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, & $(Mf)^2$

(*) Si le point M avoit été pris de manière que la perpendiculaire MP tombât entre A & F , alors FP feroit $c - x$; mais cela n'apporteroit aucun changement à l'équation finale, parce que, dans la formation de cette équation on n'emploie que le quarré de FP , qui est toujours $xx - 2cx + cc$, soit qu'il vienne de $x - c$, soit qu'il vienne de $c - x$.

$= (PM)^2 + (fP)^2$, ou $zz = yy + xx - 2cx + cc$, & $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Retranchant la seconde de ces deux dernières équations, de la première, & effaçant aa qui se trouvera de part & d'autre, j'ai $2az = 2ax + 2ac - 4cx$, & par conséquent $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; mettant donc pour z , cette valeur dans l'équation $zz = yy + xx - 2cx + cc$, j'aurai $\frac{aa xx + 2aa cx + aa cc - 4ac x^2 - 4ac^2 x + 4cc xx}{aa} = yy + xx - 2cx + cc$, ou chassant le dénominateur, transposant & réduisant, $aa yy = 4aacx - 4accx - 4acx^2 + 4ccx^2$, ou $aa yy = (4ac - 4cc)ax + (4cc - 4ac)x^2$, ou (parce que $4cc - 4ac$ est la même chose que $-(4ac - 4cc)$), on a $aa yy = (4ac - 4cc)ax - (4ac - 4cc)x^2$, ou enfin $aa yy = (4ac - 4cc)(ax - xx)$, d'où l'on tire $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$.

Telle est l'équation de la courbe dont chaque point a la propriété que nous avons supposée.

287. Cette équation peut servir à décrire la courbe par points, en donnant successivement à x plusieurs valeurs comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du cercle, & calculant en même temps les valeurs de y . Comme le procédé est absolument le même, nous n'en ferons point le calcul.

288. On peut encore décrire l'ellipse par points, en cette manière; après avoir fait $CB = CA = \frac{1}{2}a$, on prend un intervalle quelconque Br , & l'on décrit au-dessus & au-dessous de AB , du point f comme centre & du rayon Br , un arc que l'on coupe en M & M' par un arc décrit du point F comme centre & du rayon Ar . Tous les points M & M' trouvés de cette manière sont à l'ellipse.

289. La propriété fondamentale d'après laquelle nous venons de trouver l'équation, donne elle-même un moyen fort simple de décrire cette courbe par un mouvement continu. En effet, ayant choisi les deux points F & f tels qu'on les veut, on placera deux pointes ou piquets, aux deux points F & f , & y ayant fixé les deux extrémités d'un fil plus grand que la distance Ff , si l'on tend ce fil par le moyen d'un style M que l'on fera marcher en tenant toujours ce fil tendu, ce style M tracera la courbe en question, puisque la somme des deux distances du style aux deux points F & f sera toujours égale à la longueur totale du fil.

290. De-là il est aisé de voir que si la longueur du fil a été prise égale à AB , la courbe passera par les deux points A & B . Car puisque $Cf = CF$, on aura $AF = Bf$, & par conséquent $AF + Af = Af + Bf = a$, & $BF + Bf = BF + AF = a$. C'est ce que l'équation fait voir aussi; car pour savoir où la courbe rencontre la droite Ff prolongée, il faut faire $y = 0$; or cette supposition donne $\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx) = 0$, & comme $\frac{4ac - 4cc}{aa}$

ne peut être zéro, il faut, pour que cette équation ait lieu, que $ax - xx$ ou $x \times (a - x) = 0$, ce qui a lieu dans deux cas; savoir, lorsque $x = 0$, c'est-à-dire, au point A , & lorsque $x = a$, c'est-à-dire, au point B .

291. L'équation fait voir aussi que la courbe s'étend au-dessous comme au-dessus de la ligne AB , & qu'elle est absolument la même de part & d'autre de l'axe AB . En effet, cette équation donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4c^2}{aa} \cdot (ax - xx) \right]}$, qui fait voir que pour chaque valeur de x ou de AP , il y a deux valeurs de y ou de PM parfaitement égales, mais qui étant de signes contraires, doivent être portées de côtés opposés.

Il est encore évident que si sur le milieu C de AB on élève la perpendiculaire DD' , la courbe sera partagée en deux parties parfaitement égales & semblables: c'est une suite immédiate de la description; c'est aussi une suite de l'équation; mais on l'en conclura plus aisément quand nous aurons fait sur cette équation les autres remarques qui nous restent à faire.

292. La ligne AB s'appelle le *grand axe* de l'ellipse, & la ligne DD' le *petit axe*. Les deux points

F & f s'appellent les *foyers*. Les points A, B, D, D' , sont les *sommets* des axes ; & le point C le *centre*.

293. Si l'on veut avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le foyer, il faut supposer AP ou $x = AF = c$; alors on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \times (ac - cc) = \frac{4 \cdot (ac - cc)^2}{aa}$; donc, tirant la racine quarrée, $y = \pm \frac{2 \cdot (ac - cc)}{a}$; donc $m''m''' = \frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$; cette ligne $m''m'''$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse. Le paramètre est donc moindre que le quadruple de la distance c du sommet au foyer, puisque sa valeur $\frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$ qui est la même chose que $4c - \frac{4cc}{a}$ est évidemment moindre que $4c$.

Si l'on nomme p cette valeur du paramètre, on aura $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, & par conséquent, $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; on pourra donc changer l'équation à l'ellipse, en cette autre $yy = \frac{p}{a} \cdot (ax - xx)$ qui est plus simple.

294. Si l'on veut savoir quelle est la valeur de la ligne CD , il n'y a qu'à supposer dans l'équation $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$, que AP ou x est AC ou $\frac{1}{2}a$; on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \left(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa \right)$,

qui se réduit à $yy = ac - cc$; c'est-à-dire , que $(CD)^2 = ac - cc = c.(a - c) = AF \times BF$; d'où l'on tire $AF : CD :: CD : BF$. On voit donc que CD ou le demi-petit axe , est une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux deux sommets A & B .

Comme la ligne DD' est une des lignes les plus remarquables de l'ellipse , on l'introduit dans l'équation de préférence à la ligne AF ou c . Pour nous conformer à cet usage , nous nommerons b cette ligne DD' ; nous aurons donc $CD = \frac{b}{2}$, & puisque nous venons de trouver $(CD)^2 = ac - cc$, nous aurons $\frac{bb}{4} = ac - cc$, ou $bb = 4ac - 4cc$; l'équation à l'ellipse pourra donc être changée en $yy = \frac{bb}{aa} . (ax - xx)$.

Puisque nous avons $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, ou $pa = 4ac - 4cc$, & $bb = 4ac - 4cc$; de ces deux équations nous concluons $pa = bb$, & par conséquent , en réduisant cette équation en proportion $a : b :: b : p$; le paramètre est donc une troisième proportionnelle au grand axe & au petit axe.

295. Si dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa} . (ax - xx)$, on chasse le dénominateur , on aura $aayy = bb(ax - xx)$, & par conséquent $yy : ax - xx :: bb : aa$; faisant

donc attention que $ax - xx$ est la même chose que $x \times (a - x)$, & mettant, au lieu des quantités algébriques, les lignes de la figure qu'elles représentent, on aura $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$; c'est-à-dire, que le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe de l'ellipse, est au produit des deux abscisses AP & PB, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand. Et puisque cette propriété a lieu pour tous les points de l'ellipse, il s'ensuit que les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.

296. L'équation $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ ne diffère (283) de celle du cercle qui feroit décrit sur AB comme diamètre (fig. 37) qu'en ce que la quantité $ax - xx$, y est multipliée par $\frac{bb}{aa}$, c'est-à-dire, par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand; enforte que si l'on nomme z une ordonnée quelconque PN du cercle, on aura $zz = ax - xx$; mettant donc pour $ax - xx$, cette valeur zz dans l'équation à l'ellipse, on aura $yy = \frac{bb}{aa} zz$, & tirant la racine quarrée, $y = \frac{b}{a} z$ ou $ay = bz$ qui donne $y : z :: b : a$, ou $PM : PN :: DD' : AB$, ou $:: CD : AC$ ou CE ; on voit donc que les ordonnées à l'ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur le grand axe, diminuées proportionnellement, c'est-à-dire, dans le rapport du grand axe au petit axe.

De-là il est aisé de décrire une ellipse par le moyen du cercle. On voit en même temps que le cercle est une ellipse dont les deux axes a & b sont égaux, ou dont la distance du sommet au foyer est égale au demi-grand axe, ou encore dont le paramètre est égal au diamètre. Car en supposant dans les équations ci-dessus, $b = a$, ou $c = \frac{1}{2}a$, ou $p = a$, on a $yy = ax - xx$, équation au cercle.

297. Par les équations que nous avons trouvées jusqu'ici, il paroît donc qu'il n'en est pas de l'ellipse comme du cercle : une seule ligne détermine celui-ci, c'est son diamètre ; au lieu que le grand axe AB (*fig. 36*) ne suffit pas pour déterminer l'ellipse ; il faut encore connoître ou le petit axe b ou son paramètre p , ou la distance c du sommet au foyer. Quand on connoît le grand axe & la distance c , l'ellipse est facile à décrire, comme on l'a vu ci-dessus. Mais si l'on donnoit le grand axe & le petit axe, il faudroit, pour décrire l'ellipse par un mouvement continu, déterminer les foyers ; c'est une chose facile, en prenant le demi-grand axe pour rayon, & traçant de l'extrémité D (*fig. 36*) du petit axe, comme centre, deux petits arcs qui coupent le grand axe aux deux points F & f qui seront les foyers : car la somme des deux distances $FD + Df$ devant être égale à a , il faut, lorsque ces deux lignes sont égales, que chacune soit égale à $\frac{1}{2}a$.

Si l'on donnoit le grand axe & le paramètre, on détermineroit le petit axe en prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes ; c'est ce qu'enseigne la proportion $a : b :: b : p$, trouvée ci-dessus (294). Le petit axe étant trouvé, on acheveroit comme il vient d'être dit.

298. Si, pour quelque point M que ce soit de
l'ellipse

l'ellipse (fig. 36), on prolonge la ligne fM tirée d'un des foyers, jusqu'à ce que son prolongement MG soit égal à l'autre distance MF ; & qu'ayant tiré GF , on lui mène du point M la perpendiculaire MOT , cette dernière sera tangente à l'ellipse, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point M .

En effet, à cause des lignes égales MF & MG , la ligne MT est perpendiculaire sur le milieu de GF . Donc si de tel autre point N que ce soit, de cette ligne, on mène les deux droites NG & NF , elles seront égales. Supposons donc que MT pût rencontrer l'ellipse en quelque autre point N , alors en tirant Nf , il faudroit que $FN + Nf$ pût être égal à $MF + Mf$, ou à $GM + Mf$, c'est-à-dire, à Gf ; mais Gf est plus petit que $GN + Nf$, & par conséquent plus petit que $FN + Nf$; donc le point N est hors de l'ellipse.

299. Les angles FMO , OMG sont égaux, d'après la construction qu'on vient de donner; or OMG est égal à son opposé fMN , donc FMO est égal à fMN . Donc les deux lignes qui vont d'un même point de l'ellipse aux deux foyers, font des angles égaux avec la tangente.

L'expérience apprend qu'un rayon de lumière qui tombe sur une surface, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; donc si F est un point lumineux,

tous les rayons qui partis du point F , tomberont sur la concavité MAM' , iront se rassembler en f , & réciproquement.

Si du point M , on élève sur MT la perpendiculaire MI (qui sera en même temps perpendiculaire à la courbe), cette ligne divisera l'angle FMf en deux parties égales; car si des angles droits IMT , IMN on retranche les angles égaux FMT & fMN , les angles restans FMI & IMf seront égaux.

300. De-là, on peut calculer la valeur de la distance PI depuis l'ordonnée jusqu'à l'endroit où la perpendiculaire MI rencontre l'axe. Cette ligne PI s'appelle *sousnormale*, & la ligne MI , *normale*.

Pour calculer PI , nous allons d'abord calculer FI . Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales, on a $Mf : MF :: fI : FI$ (*Géom.* 104); & par conséquent (*Géom.* 98) $Mf + MF : Mf - MF :: fI + FI : fI - FI$. Or $Mf + MF = a$; & en nommant MF , z , comme ci-dessus (286), $Mf = a - z$, & par conséquent $Mf - MF = a - 2z$; d'ailleurs $fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c$, & $fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI$; donc $a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI$; donc $aa - 2ac - 2a \times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz$, d'où l'on tire $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, ou en mettant

pour z , sa valeur $\frac{ax + ac - 2cx}{a}$ trouvée (286),
on a $FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$;
mais $FI = FP + PI = AP - AF + PI =$
 $x - c + PI$; donc $PI = FI - x + c =$
 $\frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c = \frac{2aac - 2acc - 4acx + 4ccx}{aa}$
 $= \frac{2a \cdot (ac - cc) - 4x \cdot (ac - cc)}{aa} = \frac{2a - 4x}{aa} \times (ac - cc)$,
ou en mettant pour $ac - cc$ sa valeur $\frac{bb}{4}$ (294);
on a enfin $PI = bb \frac{(a - 2x)}{2aa}$ ou $PI = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a - x)$.

301. De-là, il est aisé d'avoir la valeur de la
distance PT depuis l'ordonnée jusqu'à la rencontre
de la tangente, ce qu'on appelle la *soutangente*. Car
le triangle IMT étant rectangle, & PM une perpen-
diculaire abaissée de l'angle droit, on a (Géom. 112)
 $PI : PM :: PM : PT$, c'est-à-dire, $\frac{bb}{aa} \times$
 $(\frac{1}{2}a - x) : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$ ou
(en mettant pour yy , sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$),
 $PT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Les expressions algébriques des deux lignes PI & PT
peuvent servir à mener une perpendiculaire & une tangente
à l'ellipse, en quelque point M que ce soit. Car lorsque le
point M est donné, en abaissant la perpendiculaire MP ;
on a la valeur de AP , x . Et comme on est supposé

connoître a & b , on connoît donc tout ce qui entre dans la valeur de PI & dans celle de PT .

302. De l'expression de PT , on peut conclure que si l'on mène une tangente au cercle décrit sur le grand axe AB (*fig. 37*), au point N où ce cercle est rencontré par l'ordonnée PM à l'ellipse, les tangentes NT & MT aboutiront au même point T sur l'axe. Car puisque le second axe b n'entre point dans l'expression de PT , cette ligne PT sera donc toujours la même tant que a sera le même & x le même. Ainsi toutes les tangentes aux points correspondans de toutes les ellipses décrites sur AB comme grand axe, se rencontrent au même point T .

Si à PT (*fig. 36*), on ajoute CP , qui est $\frac{1}{2}a - x$, on aura $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$ qui, en réduisant tout en fraction, se réduit à $\frac{\frac{1}{2}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; c'est-à-dire, que $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$; d'où l'on tire cette proportion $CP : AC :: AC : CT$.

303. Si l'on veut avoir l'expression de TM , cela sera facile, par le moyen du triangle rectangle TPM qui donne $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = \left[ax - xx + \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a - x)^2 \right] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

304. Si de quelque point M que ce soit de l'ellipse, on mène sur le petit axe DD' la perpendiculaire

ou l'ordonnée MP' , & qu'on nomme DP' , x' ; MP' , y' ; on aura $DP' = CD - CP' = CD - PM$, c'est-à-dire, $x' = \frac{1}{2}b - y$, & par conséquent $y = \frac{1}{2}b - x'$. On aura de même $MP' = CP = CA - AP$; c'est-à-dire, $y' = \frac{1}{2}a - x$, & par conséquent $x = \frac{1}{2}a - y'$. Si l'on substitue ces valeurs de x & de y , dans l'équation $yy = \frac{b}{a} (ax - xx)$. ou $ayy = bb (ax - xx)$, on aura $\frac{1}{4}aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abb y' - \frac{1}{4}aabb + abb y' - bby'y'$, qui se réduit à $bby'y' = aabx' - aax'x'$, d'où l'on tire $y'y' = \frac{a}{b} (bx' - x'x')$, équation semblable à celle qu'on a eue pour le grand axe, & dont on tirera par conséquent des conclusions semblables, savoir que le carré d'une ordonnée $P'M$ au petit axe, est au produit des deux abscisses $DP' \times P'D'$, comme le carré du grand axe, est au carré du petit; en effet, on tire de cette équation, $y'y' : bx' - x'x' :: aa : bb$; or $bx' - x'x'$ est $x'(b - x')$ ou $DP' \times P'D'$. On en conclura aussi que les carrés des ordonnées au petit axe, sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes; & que l'ellipse peut être décrite par le moyen du cercle construit sur son petit axe, en allongeant les ordonnées de ce cercle dans le rapport du petit axe au grand. Voyez (fig. 37).

305. On peut voir facilement, par-là, que la courbure de la surface extérieure des mâts est celle

d'une portion d'ellipsoïde, c'est-à-dire, d'un solide engendré par la révolution d'une demi-ellipse DRO (*fig. 39*) tournant autour de son grand axe.

En effet, pour déterminer les diamètres moyens entre le plus grand & le plus petit, on tire une ligne CD pour représenter le plus grand diamètre; & décrivant des extrémités C & D comme centres, & du rayon CD les deux arcs DA & CA qui se coupent en A , on abaisse la perpendiculaire AB , & ayant mené parallèlement à CD une ligne EF égale au plus petit diamètre du mât, on regarde la partie interceptée BL comme représentant la hauteur du mât depuis le premier pont (où se trouve le plus grand diamètre) jusqu'au chouquet. On divise BL en un certain nombre de parties égales; & menant par les points de division des parallèles IgN à la ligne CD , on prend ces parallèles pour les diamètres moyens que doit avoir le mât à des hauteurs représentées par la ligne correspondante Bg ; or si l'on conçoit que BM soit la hauteur réelle qui a été représentée par BL ; & si l'on prend BT telle que l'on ait $BT : BM :: Bg : BL$, alors BT sera la hauteur à laquelle on doit placer le demi-diamètre gN ; tirant donc TR parallèle & égale à gN , le point R fera un point de la surface du mât; mais si par le point R & par le point N ,

on mène RN qui rencontre BD en V , cette ligne sera parallèle à BM , & puisqu'on a $BT : BM :: Bg : BL$, ou $BT : Bg :: BM : BL$, on aura (à cause que $BT = RV$ & $Bg = VN$) $RV : VN :: BM : BL$; c'est-à-dire, que les ordonnées RV de la courbe du mât sont aux ordonnées VN du cercle AND , toujours dans un même rapport; donc cette courbe est une ellipse. Si l'on vouloit la décrire par un mouvement continu, il faudroit en déterminer les axes, ce qui est facile en menant CO parallèle à BM , & telle que $CO : CD :: BM : BL$; CO & CD seront les deux demi-axes, avec lesquels il sera facile de déterminer les foyers, & par conséquent de décrire la courbe, par quelque-une des méthodes que nous avons données (287, 88 & 89). Mais tout ceci suppose qu'on fait déterminer le point L , tel que menant ELF parallèle à CD , ELF soit égal au plus petit diamètre du mât; c'est ce que l'on fera facilement en cette manière; on prolongera DC vers H d'une quantité CH égale à la moitié du petit diamètre: du point H comme centre & d'un rayon égal à CD , on tracera un petit arc qui coupera AB au point cherché L . Car si l'on imagine EF prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre CO en T , & que l'on tire le rayon CF , le triangle rectangle CTF donnera $CT = \sqrt{(CF)^2 - (TF)^2} = \sqrt{(HE)^2 -$

$(BH)^2 = BL$, puisqu'on prescrit de faire $HL = CD = CF$, & $HC =$ à la valeur de LF , ce qui rend $BH = TF$.

306. Par ce qui précède, on voit donc que les propriétés à l'égard du second axe sont semblables à celles qu'on a trouvées à l'égard du premier, du moins, en ce qui ne dépend point des foyers. Si l'on veut avoir sur le second axe les lignes analogues à celles que nous venons de calculer sur le premier axe, c'est-à-dire, $P'I'$, $P'T'$, CT' & MT' , (*fig. 36*) on les trouvera aisément par le moyen de leurs correspondantes qu'on vient d'avoir, & des triangles semblables qu'il est aisé de reconnoître dans la figure. Si on exprime ces lignes par le moyen des abscisses DP' ou x' , on trouvera leurs expressions toutes semblables à celles qu'on a eues, en x , pour les lignes analogues sur le premier axe.

On donne aussi un *paramètre* au second axe; mais ce qu'on entend alors par cette ligne, ce n'est pas une ligne qui passe par le foyer de ce second axe, (car il n'a point de foyer), mais une troisième proportionnelle à ce second axe & au premier.

307. Jusqu'ici nous n'avons compté les abscisses que depuis le sommet; si nous voulions les compter depuis le centre C , alors nommant l'abscisse CP , z ,

nous aurions AP ou $x = \frac{1}{2}a - z$; substituant cette valeur de x , dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ & dans les valeurs de PI , PT , CT , & $(TM)^2$, on aura $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$.

L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$ donne $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$, qui fait voir que pour une même valeur de CP ou z ; on a deux ordonnées PM & PM' . Comme les valeurs de z commencent en C , & finissent en A , il semble d'abord que cette équation ne donne que la moitié DAD' de l'ellipse; mais rien ne détermine à donner à z , des valeurs positives, plutôt que des valeurs négatives; en donnant à z de ces dernières valeurs, on aura les ordonnées pm qui déterminent la seconde moitié; & comme en mettant $-z$, au lieu de $+z$ dans $\pm \frac{b}{a} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$, cette quantité ne change point, il s'ensuit que la moitié DBD' est parfaitement égale & semblable à la moitié DAD' .

308. Si d'un point quelconque M de l'ellipse (fig. 38), on mène au milieu C de l'axe AB , c'est-à-dire, au centre, une droite MCM' terminée

de l'autre part à l'ellipse, on appelle cette droite un *diamètre*. Et si par le sommet M , on mène la tangente MT , & par le centre C le diamètre NN' parallèle à MT , celui-ci s'appellera *diamètre conjugué* du premier. Une ligne mO menée d'un point m de l'ellipse parallèlement à MT , & terminée au diamètre MM' , s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre; & MO s'appelle l'*abscisse*. Le paramètre du diamètre MM' est une troisième proportionnelle à MM' & NN' .

309. Nous allons faire voir maintenant, que les ordonnées mO , à un diamètre quelconque, ont des propriétés semblables à celles des ordonnées aux axes.

Pour cet effet, j'abaisse des points m & O , les perpendiculaires mp , OQ , sur l'axe AB ; & je mène la ligne mS parallèle au même axe. Je nomme AB, a ; PM, y , CP, z ; Qp, g ; CQ, k , j'aurai $AP = \frac{1}{2}a - z$; $PB = \frac{1}{2}a + z$; $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$; $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Les triangles semblables TPM , mSO , donnent $TP : PM :: mS$ ou $pQ : SO$; c'est-à-dire, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Les triangles semblables CMP , COQ , donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'est-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$;

donc $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$.

Or puisque le point m est un point de l'ellipse, il faut (295) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$, c'est-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z) (\frac{1}{2}a + z)$, ou $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzyy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy :: \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$; ou, en multipliant les extrêmes & les moyens, & faisant attention aux quantités qui se trouveront multipliées & divisées en même temps par $\frac{1}{4}aa - zz$, & à celles qui le seront aussi par z , on aura $\frac{kkyy}{zz} (\frac{1}{4}aa - zz) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aayy - kkyy - 2gkyy - ggyy$, ou, en développant le terme $\frac{kkyy}{zz} (\frac{1}{4}aa - zz)$ & supprimant $-kkyy$ & $-2gkyy$ qu'on aura alors de part & d'autre, divisant de plus par yy , on aura $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, équation qui nous est nécessaire pour notre objet; mais avant de l'y employer, tirons-en une connoissance dont nous avons besoin.

Si l'on suppose que le point O , qu'ici nous avons supposé quelconque, soit le point C , c'est-à-dire, que la ligne mO passe par le centre, ou devienne CN , alors CQ ou k devient zéro, & la ligne Qp

ou g , devient CR . Or si dans l'équation qu'on vient de trouver, on fait $k = 0$, on aura, après avoir chassé le dénominateur, transposé, réduit, & divisé par $\frac{1}{4}aa$, $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; c'est-à-dire, $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

Après cette remarque, revenons à notre objet, & nommons $CM, \frac{1}{2}a'$; $CN, \frac{1}{2}b'$; MO, y' ; CO, z' . Les triangles semblables CPM, CQO , donnent $CM : CO :: CP : CQ$; ou $\frac{1}{2}a' : z' :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$ les triangles CNR, MSO , semblables à cause des côtés parallèles, donnent $MO : MS :: CN : CR$, ou $y' : g :: \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; donc $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}gg'b'b'}{y'y'}$; mais on vient de voir que $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$; donc $\frac{\frac{1}{4}gg'b'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; d'où l'on tire $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Reprenons maintenant l'équation $\frac{\frac{1}{4}aak k}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, & substituons-y pour gg & kk les valeurs que nous venons de trouver; nous aurons $\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou en réduisant & divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; ou, chassant les dénominateurs $\frac{1}{4}a'a'$ & $\frac{1}{4}b'b'$, on a $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{16}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, & enfin $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$;

d'où l'on tire $y'y' : \frac{1}{4} a'a' - z'z' :: b'b' : a'a'$; c'est-à-dire, $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$. Ainsi l'équation par rapport à deux diamètres conjugués quelconques, est semblable à celle qu'on a eue à l'égard des deux axes.

310. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve $z'z' - \frac{1}{4} a'a' = 0$, qui donne $z' = \pm \frac{1}{2} a'$; la courbe rencontre donc la ligne MM' en deux points opposés M & M' , éloignés du centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2} a'$, ou CM ; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

311. L'équation $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4} a'a')$ donnant $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$, fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe ; donc *chaque diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M.*

312. De-là on peut conclure 1°. que la tangente à l'extrémité N du diamètre NN' , est parallèle au diamètre MM' . 2°. ; De ce que $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$, on peut conclure que les ordonnées Om au diamètre MM' , sont celles du cercle qui auroit MM' pour diamètre, mais diminuées ou augmentées dans le rapport de a' à b' , & inclinées sous un angle égal à celui des diamètres conjugués. Si $a' = b'$, ces

ordonnées sont précisément égales à celles de ce même cercle. Enfin si l'on veut savoir à quel endroit de l'ellipse les deux diamètres conjugués peuvent être égaux, il n'y a qu'à chercher à quel endroit on a $CP = CR$ ou $(CP)^2 = (CR)^2$; c'est-à-dire, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; or cette équation donne $z = \sqrt{\frac{1}{8}aa} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, que l'on construira ainsi: ayant décrit sur le grand axe AB comme diamètre (*fig. 37*) le demi-cercle $ANEB$ coupé en E par le petit axe CD , on divisera l'arc AE en deux parties égales en N'' , & ayant abaissé $N''P$ qui coupe l'ellipse en M'' , & M' ; CM'' & CM' seront les deux demi-diamètres conjugués, égaux. Car si l'on nomme CP , z , comme le triangle CPN'' est rectangle & isoscèle, à cause de l'angle ACN'' de 45 degrés, on aura $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; donc $zz = \frac{1}{8}aa$, & $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

313. Si du centre C (*fig. 38*) on mène la perpendiculaire CF sur la tangente TM , les triangles semblables TPM , TCF donneront $TPM : PM :: CT : CF$; d'où $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Pareillement les triangles TPM & CNR , semblables à cause des côtés parallèles, donneront $TM : PT :: CN : CR$; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; & par conséquent, on aura $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou, en

quarrant, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$;
 or nous avons vu ci-dessus que yy ou $(PM)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$; $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$,
 $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}$; & $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$
 (309) : substituant ces quantités, on aura, après
 les réductions faites, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb$,
 & par conséquent $CN \times CF = \frac{1}{4}ab$; or en menant
 la tangente NT'' qui rencontre TM en I , $CN \times CF$
 exprime la surface du parallélogramme $CMIN$, &
 $\frac{1}{4}ab$ ou $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ exprime celle du rectangle formé
 sur les deux demi-axes ; donc *les parallélogrammes*
formés par les tangentes aux extrémités des diamètres
conjugués, sont égaux entre eux, & au rectangle formé
sur les deux axes.

314. Les mêmes triangles semblables TPM &
 CRN donnent, $PT : PM :: CR : RN$; donc
 $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, ou $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} =$
 $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz) \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa}$; mais les
 triangles rectangles CRN & CPM donnent $(CR)^2$
 $+ (RN)^2 = (CN)^2$ & $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$;
 donc $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 =$
 $(CN)^2 + (CM)^2$; substituant dans le premier
 membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs

valeurs algébriques, on aura, toute réduction faite, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$; donc la somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques de l'ellipse est égale à la somme des quarrés des deux demi-axes.

315. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$, on substitue pour CR & RN leurs valeurs, on aura $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé ci-dessus $(TM)^2 = \left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; par conséquent $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; mais les triangles semblables TPM , $MP'T'$ donnent, en quarrant, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (MT')^2$ ou $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : (MT')^2$; donc $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; donc $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$ ou $TM \times MT' = (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM' , on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$ (308); & par conséquent $2p' \times CM = 4(CN)^2$ ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$; & par conséquent $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

Si, sur TT' comme diamètre (fig. 40), on décrit un demi-cercle, il passera par le point C , puisque l'angle TCT' est droit; or si l'on prolonge

CM

CM jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en V , on aura, par la nature du cercle (*Géom.* 124), $CM : TM :: MT' : MV$; donc $MV = \frac{1}{2} p'$.

316. De-là on peut tirer une méthode simple pour avoir les axes d'une ellipse, & par conséquent pour la décrire, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués MM' & NN' , & l'angle qu'ils font entre eux.

On prolongera CM d'une quantité MV égale à son demi-paramètre; & du milieu X de CV on élèvera une perpendiculaire XZ qui rencontre en Z la ligne indéfinie TT' menée par le point M , parallèlement à NN' , du point Z comme centre, & de la distance ZC comme rayon, on décrira un cercle qui rencontrera TT' en deux points T & T' , par lesquels & le point C tirant TC & $T'C$, ce seront les directions des deux axes. On déterminera ensuite la grandeur de ces axes, en abaissant les perpendiculaires MP & MP' , & prenant CA égal à la moyenne proportionnelle entre CT & CP ; & CD égal à la moyenne proportionnelle entre CT' & CP' ; car on a vu ci-dessus (302) que $CP : CA :: CA : CT$; il est aisé de prouver (par le moyen des triangles semblables TPM & TCT' , & des valeurs connues de TP , PM & CT) que $CT' = \frac{(CD)^2}{CP'}$, c'est-à-dire, que $CP' : CD :: CD : CT'$.

317. Remarquons, en finissant ce qui regarde l'ellipse, qu'on emploie souvent cette courbe dans l'architecture navale. On s'en sert pour déterminer les diamètres moyens des vergues; comme nous avons vu ci-dessus, qu'on s'en servoit pour les diamètres moyens des mâts. On l'emploie encore pour déterminer les projections des lisses, &c.

Dans tous ces cas on part, pour décrire l'ellipse, de la propriété qu'a cette courbe, savoir que ses ordonnées sont proportionnelles à celles du cercle décrit sur l'un de ses axes. C'est encore sur ce principe qu'est fondée la règle suivante que l'on donne pour construire le *maître couple* d'un navire auquel on veut donner beaucoup de capacité.

Supposant (*fig. 41*) que AE est égale à la ligne du creux; EM perpendiculaire à AE , la demi-largeur du vaisseau; MF le demi-plat de la varangue; $FB = EI$ l'acculement; on décrit à part un carré $opqr$ dont on fait le côté $op = EF$. Ayant divisé op en un certain nombre de parties égales, & AI en un pareil nombre de parties, on mène par les points de division, des perpendiculaires à op & AI ; puis décrivant du point r comme centre, & du rayon ro , le quart de cercle onq , on porte la partie mn de chaque parallèle à pq , en $m'n'$ sur la parallèle à IB , correspondante à pareille division; la courbe $An'B$ qui passe par tous les points n' ainsi déterminés, forme une partie du maître couple qu'on achève ensuite, pour la partie inférieure, en menant du point B au point C bord de la quille, la ligne BC , élevant sur son milieu l , la perpendiculaire lk qui coupe en k la ligne Bk parallèle à AE ; alors du point k comme centre & du rayon kB , on décrit l'arc de cercle BC qui touche la courbe $An'B$ au point B , parce que son centre k est sur la perpendiculaire à la courbe $An'B$, au point B . L'autre moitié se construit de même.

Il est facile de voir maintenant que la courbe dont il s'agit, est une ellipse dont le demi-grand axe est $BT = AI$; & le demi-petit axe, est $AT = pq = EF$; en effet si

par le point (*) n' & par le point n on mène $n'n$; cette ligne sera parallèle à AE ; & puisque les points m & m' sont deux points de division correspondans, on aura, $om : Am' :: op : AI$; c'est-à-dire (en supposant que nn' rencontre or en s & AT en u), $sn : un' :: or$ ou $AT : TB$, donc les ordonnées un' de la courbe $An'B$ sont aux ordonnées Sn du quart de cercle, toujours dans le rapport de BT à AT ; donc cette courbe est une ellipse: d'ailleurs il est facile de voir que BT & AT sont les demi-axes. Or comme l'ellipse rencontre perpendiculairement ses axes, il est visible que pour joindre le point B & le point C par un arc qui touche la courbe en B , il faut que le centre k de cet arc soit sur la ligne TB prolongée.

De l'Hyperbole.

318. Considérons maintenant la courbe (fig. 42) qui auroit, en chacun de ses points M , cette propriété, que la différence $Mf - MF$ des distances Mf & MF à deux points fixes F & f , fût toujours la même, & égale à une ligne donnée a .

Nous allons chercher, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires PM menées sur la ligne Ff , & leurs distances FP ou AP à quelque point fixe F ou A , pris arbitrairement sur la ligne Ff .

Je prends donc, pour origine des abscisses, le

(*) Nous supposons ici, pour faciliter la démonstration, qu'on a placé le côté op sur le prolongement de IA .

point A déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff , la ligne $CA = \frac{1}{2}a$, & je fais $CB = CA$. Cela posé, je nomme AP, x ; PM, y ; la ligne AF qui est censée connue, c ; & la ligne FM, z ; alors $FP = AF - AP = c - x$ (*); $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; & puisqu'on a $Mf - MF = a$, on aura $Mf = a + MF = a + z$.

Les triangles rectangles FPM, fPM , donnent $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, & $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$; c'est-à-dire, $cc - 2cx + xx + yy = zz$ & $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Retranchant la première de ces deux équations, de la seconde, on a, en effaçant aa qui se trouvera de part & d'autre, $4cx + 2ac + 2ax = 2az$, d'où l'on tire $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; mettant donc pour z , cette valeur dans la première équation, nous aurons $cc - 2cx + xx + yy = \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$, ou, chassant le dénominateur, transposant, & réduisant, $aa yy = 4aacx + 4accx + 4acxx + 4ccxx$, ou $aa yy = (4ac + 4cc)(ax + xx)$; d'où l'on tire $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$.

(*) Si le point P étoit au-delà de F par rapport à A , FP feroit $x - c$; mais cela ne changeroit rien à l'équation finale.

319. Cette équation peut servir à décrire la courbe, par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs.

On peut encore décrire la courbe, par points, en prenant arbitrairement une partie Br plus grande que BF , & décrivant du point f comme centre, & du rayon Br , un arc que l'on coupera en quelque point M par un autre arc décrit du point F comme centre, & du rayon Ar .

Enfin on peut décrire cette même courbe, par un mouvement continu, de la manière suivante.

On fixera au point f , une règle indéfinie qui puisse tourner autour de ce point. Au point F & à l'un des points Q de cette règle, on attachera les extrémités d'un fil FMQ , moins long que fQ , & dont la différence avec fQ , soit égale à AB ; alors par le moyen d'une pointe, ou stile M , on appliquera une partie MQ du fil, contre la règle: faisant mouvoir le stile, de M vers A , en tenant toujours le fil tendu, la règle s'abaissera, la partie FM diminuera, & le stile M décrira la courbe MA dont il s'agit, & qu'on appelle une *hyperbole*. En effet il est évident que la totalité fQ ou $fM + MQ$ étant toujours de même grandeur, & $FM + MQ$ étant aussi toujours de même grandeur, leur différence $fM + MQ - FM - MQ$, ou $fM - FM$, sera aussi toujours de même grandeur.

320. L'équation $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx)$ donnant $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx) \right]}$, fait voir que pour une même abscisse AP , ou x , on a toujours deux ordonnées égales PM , PM' ,

qui tombent de part & d'autre du prolongement de AB , qu'on appelle le *premier axe* : ainsi la courbe a une seconde branche AM' parfaitement égale à la première ; & l'une & l'autre s'étendent à l'infini, puisqu'il est évident que plus on augmentera x , plus les deux valeurs $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx) \right]}$ augmenteront.

321. Si dans cette même quantité on fait x négatif, c'est-à-dire, si l'on suppose que le point P tombe au-dessus de A , elle deviendra $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (x^2 - ax) \right]}$; or $xx - ax$, ou $x(x - a)$ étant négatif tant que x est plus petit que a , la quantité $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (xx - ax) \right]}$ est alors imaginaire, & par conséquent, y n'a aucune valeur réelle depuis A jusqu'à B ; mais si-tôt que x surpasse a , $xx - ax$ redevenant positif, les valeurs de y redeviennent réelles; il part donc du point B une nouvelle portion de courbe mBm' qui comme la première s'étend à l'infini de chaque côté du prolongement de AB , & qui est parfaitement égale à celle-là; parce que si l'on prend $Bp = AP$, alors $xx - ax$ ou $Ap \times pB$ devient égal à $AP \times PB$; donc aussi pm est égal à PM .

322. Si dans l'équation $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} \times (ax + xx)$, on fait $y = 0$, on trouvera que $ax + xx$ ou

$x \cdot (a + x) = 0$; qui donne $x = 0$, & $x + a = 0$ ou $x = -a$; donc la courbe rencontre l'axe AB aux deux points A & B .

323. Si l'on suppose $AP = AF$, c'est-à-dire, $x = c$, pour avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le point F (qu'on appelle le *foyer*, ainsi que le point f) on aura

$$y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa} (ac + cc) \right]} = \pm \dots$$

$$\sqrt{\left[\frac{(4ac + 4cc)^2}{aa} \right]} = \pm \frac{2(ac + cc)}{a}; \text{ donc la double}$$

ordonnée $m''m''' = \frac{4(ac + cc)}{a}$: cette ligne est ce

qu'on appelle le *paramètre* de l'hyperbole: ainsi en

représentant cette ligne par p , on aura $p = \frac{4(ac + cc)}{a}$;

& par conséquent $\frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa}$. Substituant dans

l'équation de la courbe, on la changera en cette

autre plus simple, $xy = \frac{p}{a} (ax + xx)$.

De la valeur de p , on peut conclure que le *paramètre* du premier axe de l'hyperbole est plus que le *quadruple* de la distance du sommet A au foyer F ; car

cette valeur $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, se réduit à $p = 4c + \frac{4cc}{a}$,

qui est évidemment plus grande que $4c$.

324. Si sur le milieu C de AB , on élève une perpendiculaire DD' , dont la moitié CD soit moyenne

proportionnelle entre c & $a + c$, c'est-à-dire, entre AF & fA , cette perpendiculaire est ce qu'on appelle le *second axe* de l'hyperbole; ainsi en la nommant b , on aura $\frac{bb}{4} = c \cdot (a + c)$, ou $bb = 4ac + 4cc$; & en introduisant cette valeur de bb dans l'équation $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx)$, celle-ci se changera en $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$. On voit donc que ces trois équations de l'hyperbole, ne diffèrent de trois équations correspondantes de l'ellipse, que par le signe du quarré cc & du quarré xx .

Cette même équation $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$ nous fournit aussi une propriété analogue à celle que nous avons remarquée dans l'ellipse: en effet, si l'on chasse le dénominateur aa , on aura $aa yy = bb (ax + xx)$, qui donne cette proportion, $yy : ax + xx :: bb : aa$, ou $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$ ou $:: (CD)^2 : (AC)^2$; le quarré d'une ordonnée au premier axe de l'hyperbole, est donc au produit $AP \times BP$ des deux abscisses, comme le quarré du second axe est au quarré du premier; & par conséquent, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.

Lorsque les deux axes a & b sont égaux, l'équation est $yy = ax + xx$ qui ne diffère de celle du

cercle que par le signe du quarré xx . L'hyperbole s'appelle alors *hyperbole équilatère*.

De l'équation $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, on tire $4ac + 4cc = ap$, & puisqu'on a aussi $4ac + 4cc = bb$, on a donc $ap = bb$, qui donne $a : b :: b : p$; donc le paramètre du premier axe est une troisième proportionnelle à ce premier axe, & au second.

325. Si du point D au point A on tire la droite DA , le triangle rectangle DCA donnera $DA = \sqrt{(CD)^2 + (AC)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa}$, ou, en mettant pour bb sa valeur $4ac + 4cc$, $DA = \sqrt{cc + ac + \frac{1}{4}aa} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$; donc pour avoir les foyers quand on a les axes, il faut porter DA de C en F ; & au contraire pour avoir le second axe quand on a le premier & les foyers, il faut décrire du point A comme centre & du rayon CF , un arc qui coupe la perpendiculaire DD' , en quelque point D .

326. On voit aussi que la description de l'hyperbole dépend de deux quantités, savoir le grand axe & le petit axe; ou le grand axe & les foyers, ou le grand axe & le paramètre. D'après ce que nous venons de dire, on ramènera toujours aisément la description de l'hyperbole à l'une des méthodes que nous venons d'indiquer. Car si l'on donnoit, par

exemple , le grand axe & le paramètre , alors prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes , on auroit le second axe qui serviroit à trouver les foyers.

327. Si l'on prend sur Mf , la partie $MG = MF$, & qu'ayant tiré FG on lui mène du point M la perpendiculaire MOT , cette ligne sera tangente à l'hyperbole , c'est-à-dire , ne rencontrera la courbe qu'au seul point M .

En effet , d'un autre point quelconque N pris sur TM , menons aux deux foyers les droites Nf & NF , & au point G la droite NG ; il est évident , par la construction , que NF & NG seront égales ; or Nf est plus petit que $NG + Gf$, & par conséquent , plus petit que $NF + Gf$; donc $Nf - NF$ est plus petit que Gf , c'est-à-dire , que $Mf - MF$; donc le point N est hors de l'hyperbole : on démontrera la même chose de tout point de TM , autre que le point M .

Les angles FMO & OMG sont égaux , d'après la construction précédente ; or OMG est égal à son opposé NMQ ; donc FMO est égal à NMQ ; donc la ligne MF , qui va au foyer F , fait avec la tangente , le même angle que fait , avec cette même tangente , le prolongement MQ de la ligne fM qui

va à l'autre foyer. Donc, si le point F est un point lumineux, tous les rayons qui, partis du point F , tomberont sur la concavité MAM' se réfléchiront comme s'ils partoient du point f .

328. Déterminons maintenant la soutangente PT .

Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales par la tangente MT , on aura (*Géom.* 104) $fM : MF :: fT : FT$; or en nommant, comme ci-dessus, MF, z , on a $fM = z + a$: d'ailleurs Ff ou $Bf + AB + AF$ valant $a + 2c$, la ligne fT ou $Ff - FT$, vaudra $a + 2c - FT$; on aura donc $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; d'où, après les opérations ordinaires, on tire $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; or nous avons trouvé (318) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$, donc $2z + a = \dots$
 $\frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \frac{(2c + a) \cdot 2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a}$; substituant ces valeurs dans celle de FT , on aura $FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}$, ou en supprimant le facteur commun $\frac{2c + a}{a}$, $FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$. Ayant ainsi trouvé FT , il est

aisé d'avoir la soutangente PT ; car $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; donc $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$: d'où l'on voit que l'expression de la soutangente , pour l'hyperbole , ne diffère que par les signes , de celle qu'on a eue pour l'ellipse.

329. Si de PT on retranche AP , on aura AT ou la distance du sommet jusqu'à l'endroit où la tangente rencontre l'axe. Cette distance sera donc exprimée par $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, qui se réduit à $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

330. Cette expression de AT nous donne lieu de faire quelques remarques sur la courbure de l'hyperbole. Nous avons vu ci-dessus que chacune des deux branches AM , AM' s'étendoit à l'infini. Cependant leur courbure est telle que toutes les tangentes que l'on peut mener à chacun des points de ces branches infinies , ne rencontrent jamais l'axe que dans l'intervalle compris entre A & C . En effet , si dans la valeur de AT on substitue pour x , toutes les quantités imaginables depuis 0 jusqu'à l'infini , la valeur de AT ne croît que depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}a$; car quand

x est infini , le dénominateur $\frac{1}{2}a + x$ doit essentiellement être regardé comme la même chose que x , puisque si l'on conservoit alors $\frac{1}{2}a$, ce seroit supposer qu'il peut augmenter x , & détruire, par conséquent, la supposition qu'on fait que x est infini : or dans ce cas la quantité AT se réduit à $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$; c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a$; donc la tangente à l'extrémité infinie de chaque branche AM & AM' , passe par le centre C . Et puisque les branches opposées Bm & Bm' sont parfaitement égales à celles-là, & que les points A & B sont également éloignés de C , il s'ensuit que ces mêmes tangentes sont aussi tangentes aux extrémités infinies des branches Bm & Bm' . On les voit (*fig. 43*) représentées par les lignes CX , CY .

331. Ces tangentes s'appellent les *asymptotes* de l'hyperbole : ce sont, comme on le voit, des lignes qui partant du centre, s'approchent sans cesse de l'hyperbole, sans pouvoir l'atteindre qu'à une distance infinie.

Si par le sommet A (*fig. 42*), on mène la droite At parallèle à PM , les triangles semblables TAI , TPM donnent $TP : PM :: TA : At$; c'est-à-dire, $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a + x} \times \frac{\frac{1}{2}a + x}{ax + xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x}$, ou, en mettant pour y la valeur $\frac{b}{a} \sqrt{(ax + xx)}$,

$At = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{ax+xx}}{a+x}$, qui, lorsque x est infini, devient $\frac{1}{2}b$ ou CD , parce que ax doit être supprimé vis-à-vis de xx , & a vis-à-vis de x . Voici donc comment on déterminera les asymptotes. On élèvera au point A (*fig. 43*) une perpendiculaire AL , que l'on prolongera de part & d'autre du point A , d'une quantité égale à CD ; alors tirant par le centre C & par les deux extrémités L & L' deux lignes droites, elles feront les asymptotes.

332. Pour avoir l'expression de CT (*fig. 42*), il faut de CA retrancher AT , & l'on aura $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{\frac{1}{2}aa}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{(CA)^2}{CP}$, qui donne cette proportion $CP : CA :: CA : CT$.

333. Si l'on veut avoir l'expression de TM , le triangle rectangle TPM donne $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax+xx) + \frac{(ax+xx)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2} = \left[\frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a+x)^2 + ax+xx \right] \frac{(ax+xx)}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$.

334. Pour avoir l'expression de PI ou de la sousnormale; les triangles TPM , MPI (semblables à cause que l'angle TMI est droit, & que PM est une perpendiculaire abaissée de l'angle

droit), donneront $TP : PM :: PM : PI$, ou

$$\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}, \text{ ou (à cause}$$

$$\text{que } y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx)) PI = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x).$$

335. Cherchons maintenant l'équation par rapport au second axe DD' ; & pour cet effet menons la perpendiculaire MP' sur ce second axe, & nommant MP' , y' ; DP' , x' ; on aura $CP' = PM = y = \frac{1}{2}b - x'$; $P'M = CP = \frac{1}{2}a + x = y'$; & par conséquent $x = y' - \frac{1}{2}a$; substituant donc pour x & y , ces valeurs, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ ou $aa yy = bb(ax + xx)$, on aura, après les réductions faites, $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$; d'où l'on voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse; l'équation à l'égard du second axe, n'est pas semblable à celle qu'on a à l'égard du premier.

336. Enfin si l'on veut l'équation par rapport à l'axe AB , en prenant les abscisses depuis le centre C ; on nommera CP , z ; & l'on aura $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; & par conséquent $x = z - \frac{1}{2}a$; substituant dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, on aura $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$, pour l'équation par rapport au premier axe, les abscisses étant prises du centre.

Et à l'égard du second axe DD' , si l'on nomme CP' , z' ; on aura $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$; & par conséquent $x' = \frac{1}{2}b = z'$; substituant dans l'équation $y'y' = \frac{a^2}{b^2} (\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$ que nous avons trouvée (335) pour le second axe, on aura $y'y' = \frac{a^2}{b^2} (z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

337. Si l'on veut rapporter au centre C , les expressions de PT , CT , PI & TM , trouvées ci-dessus, il n'y a qu'à substituer, dans ces expressions, $z - \frac{1}{2}a$ au lieu de x , & l'on trouvera $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $(TM)^2 = (\frac{bbz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa) \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

Et si l'on prolonge MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le second axe en T' , les triangles semblables TPM , TCT' donneront $TP : PM :: CT : CT'$, ou $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aa y}{zz - \frac{1}{4}aa}$; mais $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$; donc $CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{PM} = \frac{(CD)^2}{CP'}$; donc $CP' : CD :: CD : CT'$.

338. Si par le centre C de l'hyperbole (*fig. 43*) on mène une droite quelconque MCM' terminée de part & d'autre à l'hyperbole, cette droite s'appelle un *diamètre*. Toute droite mO menée d'un point m de

m de la courbe parallèlement à la tangente en M , & terminée au diamètre MM' prolongé, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. MO & OM' en sont les *abscisses*. Nous allons démontrer que les propriétés des ordonnées mO , à l'égard des diamètres terminés à la courbe, sont les mêmes que celles des ordonnées MP à l'égard du premier axe.

Menons des points m & O , les perpendiculaires mp & OQ sur l'axe AB ; & du point m menons mS parallèle à AP ; nommons PM , y ; CP , z ; Qp , g ; CQ , k ; nous aurons $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Les triangles semblables CPM , CQO , donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'est-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$. Les triangles semblables TPM , mSO , donnent $PT : PM :: mS$ ou $Qp : SO$; c'est-à-dire, (337) $\frac{z - \frac{1}{2}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{z - \frac{1}{2}aa}$; donc $mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z - \frac{1}{2}aa}$; or puisque le point m appartient à l'hyperbole, il faut (324) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: AP \times pB : AP \times PB$; c'est-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z - \frac{1}{2}aa}\right)^2 : yy :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a)(z + \frac{1}{2}a)$,

ou $\frac{k k y y}{z z} - \frac{z g k z y y}{z (z z - \frac{1}{4} a a)} + \frac{g g z z y y}{(z z - \frac{1}{4} a a)^2} : y y ::$
 $k k - 2 k g + g g - \frac{1}{4} a a : z z - \frac{1}{4} a a$; donc , en
multipliant les extrêmes & les moyens , & faisant
attention aux quantités qui se trouveront multipliées
& divisées , en même temps , par $z z - \frac{1}{4} a a$, & à
celles qui le feront aussi par z , on aura $\frac{k k y y}{z z} (z z - \frac{1}{4} a a)$
 $- 2 g k y y + \frac{g g z z y y}{z z - \frac{1}{4} a a} = k k y y - 2 g k y y +$
 $g g y y - \frac{1}{4} a a y y$, ou , en développant le terme
 $\frac{k k y y}{z z} (z z - \frac{1}{4} a a)$, & supprimant $k k y y$ & $- 2 g k y y$
que l'on aura alors dans chaque membre , divisant
de plus par $y y$, on aura $-\frac{1}{4} \frac{a a k k}{z z} + \frac{g g z z}{z z - \frac{1}{4} a a}$
 $= g g - \frac{1}{4} a a$, équation qui va nous servir à démon-
trer la propriété dont il s'agit ; mais auparavant nous
ferons observer que si de part ou d'autre du centre C ,
on prend sur l'axe $A B$ la partie $C R$ qui soit moyenne
proportionnelle entre $B P$ & $A P$; c'est-à-dire , telle
que $(C R)^2 = A P \times P B = z z - \frac{1}{4} a a$; & si ayant
élevé la perpendiculaire $R N'$ terminée en N' , par
la ligne $N N'$ menée par le centre C parallèlement
à $T M$, on fait $C N = C N'$, alors $N N'$ est ce qu'on
appelle un *diamètre conjugué* au diamètre $M M'$; &
l'on appelle *paramètre* du diamètre $M M'$, une troi-
sième proportionnelle à $M M'$ & $N N'$.

Revenons maintenant à notre objet ; nommons

$CM, \frac{1}{2}a'$; CN ou $CN', \frac{1}{2}b'$; CO, z' ; & Om, y' .
Les triangles semblables CPM, CQO , donnent
 $CM : CP :: CO : CQ$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : z :: z' : k$;
donc $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Les triangles mSO & $CN'R$, semblables à cause
des côtés parallèles, donnent $CN' : CR :: mO : mS$,
ou $\frac{1}{2}b' : CR :: y' : g$; donc $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, & par
conséquent $gg = \frac{CR^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou (puisque'on a fait
 $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$) $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Substituons pour gg & kk , les valeurs que nous
venons de trouver; substituons-les, dis-je, dans
l'équation $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, trou-
vée ci-dessus, & nous aurons $-\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} +$
 $\frac{y'y'zz(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aa$, ou
(en réduisant & divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$) $\frac{-z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} =$
 $-\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, ou, après les opérations ordinaires,
 $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, équation semblable à
celle qu'on a eue pour le premier axe.

339. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$,
qui donne $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre

donc la ligne MM' en deux points opposés M & M' , éloignés du centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2} a'$, ou CM ; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

340. L'équation $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4} a'a')$ donnant $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4} a'a')}$; c'est-à-dire, deux valeurs égales & de signe contraire, pour y' , fait voir que si l'on prolonge mO ; de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe; chaque diamètre MM' coupe donc en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M .

341. La même équation donne $a'a'y'y' = b'b'(z'z' - \frac{1}{4} a'a')$, d'où l'on tire $y'y' : z'z' - \frac{1}{4} a'a' :: b'b' : a'a'$, ou $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$; c'est-à-dire, le quarré d'une ordonnée quelconque mO à un diamètre terminé à la courbe, est au produit $MO \times OM'$ de ses deux abscisses, comme le quarré du diamètre conjugué, est au quarré de ce premier diamètre.

342. Si du centre C on abaisse sur TM la perpendiculaire CF , les triangles semblables CFT , TPM , donneront $TM : PM :: CT : CF$, & par conséquent $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Les triangles semblables

CRN' , TPM , donneront $PT : TM :: CR : CN'$
 ou CN ; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; donc $CF \times CN =$
 $\frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou en quarrant,
 $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; or on a
 $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$; $(CR)^2 = zz -$
 $\frac{1}{4}aa$ (338); & (337) $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $(PT)^2$
 $= \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; substituant ces valeurs, on a,
 après les réductions faites, $(CF)^2 \times (CN)^2 =$
 $\frac{1}{16}aabb$, ou $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$; or si l'on prolonge
 MT jusqu'à l'asymptote, en I , MI sera égal à CN ,
 comme nous le verrons ci-dessous, & $CIMN$ sera
 par conséquent, un parallélogramme dont la sur-
 face sera $= CF \times MI = CF \times CN$; donc quel-
 que part où soit le point M , le parallélogramme
 $CIMN$ sera toujours égal en surface au rectangle
 des deux demi-axes, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$
 ou $\frac{1}{4}ab$.

343. Les triangles semblables TPM & CRN'
 donnent $TP : PM :: CR : RN'$; donc
 $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, & $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2}$
 $= \frac{bbzz}{aa}$ en substituant les valeurs algébriques &
 réduisant; or les triangles rectangles CPM &
 CRN' donnent $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$,
 Cc 3

& $(CN')^2$ ou $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$;
 donc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 -$
 $(CR)^2 - (RN')^2$; substituant dans le second
 membre , au lieu des lignes qui y entrent , leurs
 valeurs algébriques trouvées ci-dessus , on aura ,
 après les réductions faites , $(CM)^2 - (CN)^2 =$
 $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; c'est-à-dire , que *la différence des*
quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques ,
est toujours la même , & égale à la différence des quarrés
des deux demi-axes.

Il suit de-là que dans l'hyperbole équilatère ,
 chaque diamètre est égal à son conjugué ; car si
 $a = b$, on a $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, & par
 conséquent , $CM = CN$.

344. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$
 on substitue pour CR & RN' leurs valeurs algé-
 briques , on aura $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$;
 or nous avons trouvé ci-dessus (337) , $(TM)^2 =$
 $\left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa \right) \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; donc
 $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times (CN)^2$; mais les
 triangles semblables MPT & $MP'T'$ donnent , en
 quarrant , $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (T'M)^2$,
 ou $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa)}{zz} :: zz : (T'M)^2$;

donc $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times \zeta\zeta}{\zeta\zeta - \frac{1}{4}aa}$; donc $(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, ou $TM \times T'M = (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM' , on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$, & par conséquent $2p' \times CM = 4(CN)^2$, ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, d'où l'on tire $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

345. De-là on peut conclure la méthode suivante pour avoir les axes de l'hyperbole, & par conséquent pour décrire cette courbe, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués, & l'angle qu'ils font entre eux.

On prendra sur MC (*fig. 44*) une ligne $MH = \frac{1}{2}p'$, & sur le milieu I de CH on élèvera une perpendiculaire IK , qui coupera en quelque point K la ligne MT' menée par le point M parallèlement au conjugué NN' . De ce point K comme centre, & d'un rayon égal à la distance de K à C , on décrira un cercle qui rencontrera MT' aux deux points T & T' par lesquels & par le centre C tirant TC & CT' , ce seront les directions des axes ; car il est clair, 1°. que l'angle $TC T'$ sera droit, puisque la circonférence passe par le point C , & qu'elle a TT' pour diamètre ; 2°. par la nature du cercle, on a (*Géom. 127*) $CM : TM :: T'M : MH$; donc puisqu'on a fait $MH = \frac{1}{2}p'$, on a $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

Ayant ainsi déterminé les directions des axes, on en déterminera la grandeur en abaissant du point M , les perpendiculaires MP , MP' , & prenant CA moyenne proportionnelle entre CP & CT ; & CD' moyenne

proportionnelle entre CP' & CT' ; c'est une suite des expressions que nous avons trouvées (337) pour CT & CT' .

Quand les deux diamètres conjugués que l'on connoît sont égaux, alors le paramètre leur est égal aussi, ce qui rend $MH = MC$; les deux points de section H & C se confondant alors, MC est une tangente au cercle; ainsi, il faut tout simplement, pour avoir le centre K , élever sur CM une perpendiculaire au point C .

De l'Hyperbole entre ses asymptotes.

346. L'hyperbole considérée, par rapport à ses asymptotes, a quelques propriétés dont la connoissance peut être utile; nous allons les exposer. Il faut se rappeler ici comment on détermine les asymptotes; voyez (331).

Nous allons rapporter chaque point E de l'hyperbole (*fig. 45*), aux deux asymptotes CLO , $CL'o$, en menant la ligne EQ parallèle à l'une d'entre elles; & nous chercherons la relation qu'ont entre elles les lignes EQ & CQ .

Pour trouver cette relation, nous menerons par le point quelconque E , la ligne OEo parallèle au second axe DD' , & la ligne ES parallèle à CLO ; par le sommet A nous tirerons AG parallèle à $CL'o$. Et nous nommerons CA , $\frac{1}{2}a$; CD ou AL ou AL' , $\frac{1}{2}b$; CP , z ; PE , y ; AG , m ; GL , n , CQ , t ; QE , u .

Les triangles semblables , CPO , CAL , nous donnent $CA : AL :: CP : PO$, ou $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, ou $a : b :: z : PO = Po = \frac{bz}{a}$; donc $EO = \frac{bz}{a} - y$, & $Eo = \frac{bz}{a} + y$; par conséquent $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$ (en mettant pour yy la valeur $\frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$, & réduisant) ; c'est-à-dire , que $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$, propriété qui appartient à tout point de l'hyperbole , puisque le point E a été pris arbitrairement.

347. Les triangles QEO , ESo , & AGL semblables entre eux , donnent $AL : AG :: EO : EQ$, & $AL : GL :: Eo : ES$; donc multipliant ces deux proportions par ordre (afin d'y introduire $EO \times Eo$, dont on a la valeur) on aura $(AL)^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$; c'est-à-dire , $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; donc $ut = mn$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Ainsi en quelque point E que ce soit de l'hyperbole , on a toujours $EQ \times ES$, ou plutôt $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Or si l'on suppose que le point E tombe en A , CQ devient CG , & QE devient AG ; on a donc $CG \times AG = AG \times GL$; donc $CG = GL$. Mais le point G se trouvant , par-là , être le milieu de CL , on doit avoir $CG = AG = GL$; car le cercle décrit sur CL comme diamètre (& qui auroit par

conséquent CG pour rayon), passeroit par le point A , à cause de l'angle droit A ; on a donc $m = n$, & par conséquent $ut = m^2 = (CG)^2$.

Ce quarré constant m^2 ou $(CG)^2$, auquel le produit ut ou $CQ \times QE$ est toujours égal, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

348. De la propriété que nous venons de démontrer, on peut déduire cette autre : *De quelque point E que ce soit de l'hyperbole, si l'on tire, de quelque manière que ce soit, une droite REr terminée aux asymptotes, les parties RE , mr , interceptées entre la courbe & les asymptotes, seront égales.*

Car si par le point m on mène hmH parallèle à OEo , les triangles semblables REO , & RmH donnent $ER : Rm :: EO : Hm$; & les triangles semblables $rh m$ & roE , donnent $Er : mr :: Eo : mh$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$; or les deux produits $EO \times Eo$ & $Hm \times mh$ sont égaux chacun à $(CD)^2$ (346); donc $ER \times Er = Rm \times mr$, ou $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; faisant les multiplications indiquées, & supprimant, de part & d'autre, $ER \times mr$, on aura $ER \times Em = Em \times mr$; donc $ER = mr$.

349. De-là on conclura que toute tangente Te

à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact M .

350. Si, par le point M , on tire IMi parallèle à DD' , & si, par un point quelconque E , on tire REr parallèle à la tangente Tt , les triangles semblables TMI & REO donneront $TM : MI :: RE : EO$; & les triangles semblables Mit , Eor donneront Mt ou $TM : Mi :: Er : Eo$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $(TM)^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$; or les deux produits $MI \times Mi$ & $EO \times Eo$ sont chacun égal à $(CD)^2$; donc $(TM)^2 = RE \times Er$.

351. Si, du centre C , on mène le diamètre CMV , il divisera en deux parties égales la ligne Rr parallèle à Tt , puisque (349) il passe par le milieu M de Tt ; nommant donc CM , $\frac{1}{2}a'$; TM , $\frac{1}{2}q$; CV , z' ; l'ordonnée VE , y' ; les triangles semblables CMT , CVR donneront $CM : MT :: CV : VR$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$ ou $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; donc $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, & $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; donc puisque $RE \times Er = (MT)^2 = \frac{1}{4}qq$, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; or (338) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; donc, en substituant, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, ou $(qq - b'b') \frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq - b'b')$, ou

$(qq - b'b') \frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4} (qq - b'b') = 0$, ou
 $(qq - b'b') \left(\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4} \right) = 0$; & divisant par
 $\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, on aura $qq - b'b' = 0$, qui donne $q = b'$,
 ou $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, c'est-à-dire, $MT = CN$, CN étant le
 demi-diamètre conjugué de CM ; c'est ce que nous
 avons promis (342) de démontrer. On a donc
 (fig. 43) $MI = CN$.

352. On a donc aussi pour toute droite REr paral-
 lèle au conjugué CN (fig. 45) $RE \times Er = (CN)^2$.

353. On voit donc que, connoissant deux demi-
 diamètres conjugués CM , CN (fig. 46) & l'angle
 qu'ils font entre eux, il est très-facile de décrire
 l'hyperbole par des points trouvés successivement.
 En effet ce qui a été dit (349 & 351) fait voir
 qu'en menant par l'origine M du demi-diamètre
 CM la ligne TMt parallèle à CN , & prenant de
 part & d'autre du point M les parties MT , Mt ,
 égales chacune à CN , si par le centre C on tire
 les lignes CT & Ct , elles seront les asymptotes.
 Et ce qui a été démontré (348) fait voir que si
 par le point M on tire arbitrairement tant de droites
 PMQ , PMQ qu'on voudra, & qu'on fasse sur
 chacune $PO = MQ$, les points O trouvés de cette
 manière, appartiendront tous à l'hyperbole cherchée.

On peut ensuite faire servir chaque point O , à en trouver d'autres tels que $V, V, \&c.$ en tirant les droites $ROS, ROS, \&c.$, & faisant $SV = RO$.

354. On voit aussi, par-là, comment, entre deux lignes données pour asymptotes, on peut décrire une hyperbole qui passe par un point donné entre ces lignes.

355. Enfin, en divisant l'angle des asymptotes & son supplément, chacun en deux parties égales, on aura les directions des deux axes, dont on déterminera la grandeur comme il a été dit (345); ce qui donne un second moyen de résoudre la question dont il s'agissoit au même endroit.

De la Parabole.

356. Il s'agit maintenant de trouver les propriétés de la courbe dont chaque point seroit aussi éloigné d'un point fixe F (*fig. 47*), que d'une droite XZ dont la position est connue, c'est-à-dire, d'une courbe telle que pour chaque point M , abaissant la perpendiculaire MH , on auroit toujours $MF = MH$.

Du point F menons FV perpendiculaire sur XZ ; & partageons FV en deux parties égales en A : A fera un point de la courbe, puisque $AV = AF$; ce point est le *sommet*.

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on

appelle une *parabole*; nous allons chercher une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires MP abaissées sur FV , & leurs distances AP au point A . Nous nommerons donc AV ou AF , c ; AP , x ; PM , y ; alors nous aurons $VP = AV + AP = c + x = MH$; & puisque $MF = MH$, nous aurons aussi $MF = c + x$: d'ailleurs $FP = AP - AF = x - c$; or le triangle rectangle $FP M$ donne $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$; donc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$, donc transposant, & réduisant, $yy = 4cx$; c'est-là l'équation de la courbe, & voici ce qu'elle nous apprend.

1°. Cette équation donne $y = \pm \sqrt{4cx}$; donc, pour une même valeur de x ou AP , on a deux valeurs égales de y ou PM ; mais comme l'une est positive, & l'autre négative, elles tombent de côtés opposés de la ligne indéfinie API qu'on appelle *l'axe*, c'est-à-dire, qu'elles sont PM & PM' : la courbe a donc deux branches AM , AM' parfaitement égales & qui s'étendent à l'infini, puisqu'il est clair que plus x augmentera, plus $\sqrt{4cx}$, & par conséquent y , augmentera.

2°. Si l'on fait x négatif, on aura $y = \pm \sqrt{-4cx}$; c'est-à-dire, imaginaire; la courbe ne s'étend donc point au-dessus du point A .

3°. Si l'on fait $x = c$ pour avoir l'ordonnée qui

passé par le point F qu'on appelle *le foyer*, on a $y = \pm \sqrt{4cc} = \pm 2c$; c'est-à-dire, que $Fm'' = 2c$; donc $m''m''' = 4c$. Cette ligne $m''m'''$ qui passe par le foyer est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'axe de la parabole. Ainsi le *paramètre* de l'axe de la parabole est quadruple de la distance AF du sommet au foyer.

4°. Donc si l'on nomme p ce paramètre, on aura $4c = p$, & l'équation de la parabole deviendra, par conséquent, $yy = px$.

357. Ayant l'équation d'une parabole, il est aisé de décrire cette courbe par des points trouvés successivement, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, & calculant les valeurs correspondantes de y .

358. On peut encore la décrire par points, de cette autre manière : ayant choisi le point A que l'on veut prendre pour sommet & la ligne indéfinie TVI qui doit être la direction de l'axe, on prendra les parties AV , AF égales chacune à $\frac{1}{4}p$, le point F , sera le foyer ; alors on élèvera sur chaque point de l'axe des perpendiculaires indéfinies MM' , & traçant du point F comme centre, & de la distance VP comme rayon, deux petits arcs qui coupent chaque perpendiculaire en deux points M & M' , ces

points seront à la parabole , puisque FM , qu'on fait par-là égal à VP fera égal à MH , en imaginant la droite VH perpendiculaire à l'axe. Cette droite XVH s'appelle la *directrice*.

359. Enfin on peut décrire la parabole par un mouvement continu en employant une *équerre* VHf : on attache sur un point quelconque f d'une des branches de cette équerre , l'extrémité d'un fil de longueur égale à fH ; & ayant attaché l'autre extrémité au point F , on applique par le moyen d'un stile M , une partie du fil contre fH , & tenant toujours le fil tendu , on fait glisser l'autre côté de l'équerre , le long de ZX ; le stile M dans ce mouvement , trace la parabole MA .

360. L'équation $yy = px$, nous apprend que pour chaque point M , le *quarré de l'ordonnée* MP , est égal au produit de l'abscisse correspondante , par le paramètre.

On voit dans cette même équation , que les *quarrés* yy des ordonnées , sont entre eux comme les *abscisses* x , c'est-à-dire , que $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP : Ap$; car $(PM)^2 = p \times AP$ & $(pm)^2 = p \times Ap$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$, en divisant par p .

L'équation à l'ellipse , trouvée (286) , est
 yy

$yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} (ax - xx)$; si l'on y suppose que le grand axe a est infini, alors xx doit être supprimé comme incapable de diminuer ax ; il en est de même de $4cc$ à l'égard de $4ac$; l'équation se réduit donc à $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4a^2cx}{aa}$; c'est-à-dire, $yy = 4cx$, qui est l'équation à la parabole; la parabole n'est donc qu'une ellipse dont le grand axe est infini.

361. Si après avoir joint les points F & H par la ligne FH , on mène du point M , sur cette ligne, la perpendiculaire MOT ; cette dernière sera tangente à la parabole, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point M .

En effet, d'un autre point quelconque N de cette ligne, menons NF , NH ; & la ligne NZ perpendiculaire sur XZ ; si quelque autre point tel que N de cette ligne pouvoit appartenir à la parabole, il faudroit que $NF = NZ$; or NZ est plus petit que NH , qui, en vertu de la construction, est égal à NF .

362. L'angle FMO , étant, par cette construction, égal à OMH , lequel est égal à son opposé fMN , il s'ensuit que FMO est égal à fMN ; donc les rayons de lumière partis du point F & tombant sur la concavité $M'AM$ se réfléchissent

tous parallèlement à l'axe ; & réciproquement les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe , vont tous se rassembler au foyer F .

363. La ligne MH étant parallèle à VP , les triangles HOM , TOF sont semblables , & de plus égaux , puisque HO est égal à OF ; donc $FT = MH = PV = x + c$; par conséquent , $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; donc la *soutangente* PT de la parabole est double de l'abscisse AP .

364. Si du point M , on mène la perpendiculaire MI sur la tangente TM , les triangles semblables TPM , PMI donneront $TP : PM :: PM : PI$; c'est-à-dire , $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$, ou (à cause que $y^2 = px$) , $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2} p$. La *sousnormale* de la parabole , est donc la même pour chaque point , & égale à la moitié du paramètre.

365. On emploie la parabole pour tracer le *maître couple* des vaisseaux auxquels on veut donner beaucoup de façons. On décrit un rectangle $ABCD$ (*fig. 48*) dont la longueur AB est celle du *bau* , & la hauteur est le *creux* du navire : de part & d'autre du milieu E de DC , on prend EG , EH égales chacune au demi-plat de la varangue , & ayant mené GM & HL perpendiculaires à DC & égales chacune à l'acculement , on décrit deux paraboles égales AM , BL qui aient leurs sommets en A & en B , pour axe commun la ligne AB , & dont la première passe par M & la seconde par L .

Pour pouvoir tracer ces paraboles, il faut connoître leur paramètre; or si l'on prolonge GM jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en P , alors MP sera une ordonnée, & AP l'abscisse correspondante; mais l'équation $yy = px$, faisant voir que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse & le paramètre, nous indique que pour trouver le paramètre, on peut tirer AM & à son extrémité M , élever une perpendiculaire MK qui rencontrera AB au point K , & déterminera KP pour ce paramètre; car à cause de l'angle droit AMK , la perpendiculaire PM est moyenne proportionnelle entre AP & PK . Ayant déterminé ainsi le paramètre, il sera facile d'avoir tant de points de la parabole que l'on voudra par la méthode donnée (358).

Lorsque ces paraboles sont tracées, on achève le plat de la varangue, en employant deux arcs de cercle dont l'un MO tourne sa convexité en bas, & l'autre OS la tourne en haut; mais il faut, non-seulement, que les deux arcs MO & OS se touchent (ce qui est aisé d'après ce qui a été dit en Géométrie 49); il faut encore que MO touche la parabole en M ; c'est ce qui aura lieu si le centre de l'arc MO est en quelque point R de la perpendiculaire MI à la parabole; or nous venons de voir (364) que pour déterminer cette perpendiculaire, il falloit prendre la sousnormale PI égale à la moitié du paramètre; il n'y aura donc qu'à tirer du point M , au milieu I de PK la ligne MI , & prendre le centre de l'arc MO sur cette droite MI . On prend ordinairement ce centre de manière que le point O , où l'arc MO rencontre la ligne MS tirée au bord S de la quille, soit le milieu de MS ; c'est pourquoi ayant pris MF & FO égales chacune au quart de MS , on élèvera du point F sur MS la perpendiculaire FR qui déterminera.

le centre R de l'arc MO , puis par le point R & le point O , on tirera RO que l'on prolongera de la quantité OT égale à RO ; & le point T fera le centre de l'arc OS ; en sorte que les deux arcs MO & OS se toucheront en O , & le premier touchera la parabole en M . L'autre moitié s'achève de même.

366. Toute ligne MX (*fig. 49*) tirée d'un point M de la parabole, parallèlement à l'axe AQ , s'appelle un *diamètre*; chaque diamètre a son *paramètre*, qui est en général le quadruple de la distance MF de l'origine de ce diamètre, au foyer. Toute droite mo menée d'un point m de la parabole, parallèlement à la tangente TM qui passe par l'origine ou le sommet M de ce diamètre, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. Nous allons voir que les ordonnées à un diamètre quelconque, ont la même propriété que les ordonnées à l'axe.

Menons l'ordonnée MP à l'axe, & des points m & O , menons-lui les parallèles mp , OQ ; enfin du point m , menons mS parallèle à l'axe. Nommons AP , x ; PM , y ; Qp , g ; AQ , k . Nous aurons $Ap = k - g$. Les triangles semblables TPM , mSO , donnent $TP : PM :: mS : SO$; c'est-à-dire, $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$; donc $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; or puisque le point m appartient à la parabole, il faut

(360) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap : AP$; c'est-à-dire , $\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k - g : x$, ou $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy :: k - g : x$; donc , en multipliant les extrêmes & les moyens , on a $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, qui se réduit (en divisant par yy , & supprimant les termes qui sont les mêmes de part & d'autre) à $x + \frac{gg}{4x} = k$ ou $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Nommons maintenant l'abscisse MO , x' ; & l'ordonnée MO , y' . Nous aurons $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; donc $x' = k - x$; & par conséquent $\frac{gg}{4x} = x'$, ou $gg = 4xx'$, mais le triangle rectangle mSO , donne $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$; c'est-à-dire , $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Mettant donc pour gg la valeur $4xx'$, & pour yy la valeur px , on aura , après les réductions faites , $4xx' + px' = y'y'$, ou $(4x + p)x' = y'y'$. Mais si on appelle p' le paramètre du diamètre MX , on aura $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$; donc enfin $p'x' = y'y'$. L'équation à l'égard d'un diamètre quelconque est donc la même qu'à l'égard de l'axe. *Le carré de l'ordonnée mO à un diamètre quelconque MX , est donc égal au produit de l'abscisse par le paramètre de ce diamètre ; & les carrés des ordonnées à un*

diamètre quelconque de la parabole sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

367. Il suit, de tout ce qui précède, que si l'on veut décrire une parabole qui ait une ligne indéfinie MX pour diamètre, une ligne donnée p' pour paramètre de ce diamètre, & dont les ordonnées fassent un angle donné avec ce même diamètre; on tirera par l'origine M une ligne NMT , faisant avec MX l'angle NMX égal à l'angle donné. Par le même point M , on mènera MF faisant de l'autre part avec MT l'angle FMT égal à NMX ; & ayant fait $MF = \frac{1}{4} p'$, le point F sera le foyer de la parabole (362 & 366); tirant donc par le point F la ligne indéfinie TFQ parallèle à MX , & qui rencontre TM en T , ce sera la direction de l'axe, dont on déterminera le sommet A en abaissant la perpendiculaire MP , & partageant PT en deux parties égales, en A (363). Alors ayant le foyer & le sommet, il sera facile de décrire la parabole (358 & 359). -

368. Les trois courbes que nous venons de considérer successivement, ont été nommées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône par un plan. Par exemple, on a l'ellipse $AMmB$ (*fig. 50*) si l'on coupe le cône CHI par un plan AMm , de manière que ce plan rencontre

les deux côtés CH , CI en deçà du sommet C : il faut seulement en excepter le cas où ce plan feroit avec le côté CI le même angle que fait l'autre côté CH avec la base ; dans ce cas la section est un cercle.

Si au contraire le plan coupant ne rencontre l'un des côtés CH qu'autant que celui-ci sera prolongé, on a l'hyperbole AMm (*fig. 51*).

Enfin on a la parabole, si le plan coupant est parallèle à l'un CH des côtes du cône (*fig. 52*) : en voici la démonstration.

Concevons le cône CHI (*fig. 50 & 51*) coupé par un plan qui passe par la droite qui joindroit le sommet C , & le centre du cercle qui sert de base ; c'est-à-dire, par un plan qui passe par l'axe du cône : la section fera un triangle. Coupons maintenant le cône par trois plans AMm , FMG , HmI perpendiculaires à ce triangle, & dont les deux derniers soient parallèles à la base du cône. Les deux sections FMG , HmI feront des cercles (*Géom. 199*), qui rencontreront la section AMm en M & en m . Les intersections FG , HI des plans de ces cercles, avec le triangle par l'axe, feront les diamètres de ces mêmes cercles. Les intersections PM , pm de ces cercles, avec le plan AMm feront (*Géom. 188*)

perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, & feront en même temps ordonnées de ces cercles, & de la section AMm .

Cela posé, les triangles semblables APG , ApI donnent $AP : Ap :: PG : pI$, & les triangles semblables BFp , BHp donnent $PB : pB :: FP : Hp$; multipliant ces deux proportions par ordre, on a $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$; or par la nature du cercle $FP \times PG = (PM)^2$, & $Hp \times pI = (pm)^2$; donc $AP \times PB : Ap \times pB :: (PM)^2 : (pm)^2$; donc les quarrés des ordonnées de la section AMm sont entre eux comme les produits des abscisses; or ces abscisses tombent de différens côtés de l'ordonnée (*fig. 50*), & d'un même côté (*fig. 51*); donc AMm (*fig. 50*) est une ellipse, & (*fig. 51*) une hyperbole.

Quant à la figure 52, en supposant les mêmes choses que ci-dessus, on a, par la nature du cercle, $(PM)^2 = FP \times PG$, $(pm)^2 = Hp \times pI$, ou (à cause des parallèles Pp , FH , & FP , Hp qui donnent $FP = Hp$) $(pm)^2 = FP \times pI$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, à cause des triangles semblables APG , ApI ; donc les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses; donc la courbe est une parabole.

Réflexions sur les Équations aux Sections coniques.

369. Il suit de ce que nous avons démontré (309) que si dans l'ellipse, on nomme x , l'abscisse CO (*fig. 38*) prise depuis le centre sur le diamètre MM' ; y l'ordonnée MO parallèle au diamètre conjugué CN , on aura $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$ pour l'équation à ce diamètre, quelque angle que fassent d'ailleurs ces deux diamètres conjugués. Et si, par le point m , on mène MO' parallèle à MM' & qui sera alors une ordonnée au diamètre NN' ; alors nommant CO' , x' ; & MO' , y' ; on aura $y = x'$ & $x = y'$; & l'équation deviendra $x'x' = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - y'y')$; d'où l'on tire $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4}bb - x'x')$. C'est-à-dire, qu'en prenant les abscisses du centre, l'équation, par rapport à quelque diamètre que ce soit, est toujours de même forme, tant qu'on prend les ordonnées parallèles au diamètre conjugué.

Si b est égal à a , l'équation devient $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, que nous avons vu (285) appartenir au cercle. Mais il faut bien faire attention que c'est en supposant les ordonnées perpendiculaires au diamètre; car lorsqu'elles font tout autre angle qu'un angle droit, l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ appartient à l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués égaux.

Pour l'hyperbole, si l'on nomme x , l'abscisse CO (*fig. 43*) prise depuis le centre sur le diamètre MM' terminé à la courbe, & y l'ordonnée MO parallèle au diamètre conjugué NN' , on aura (338) $yy = \frac{bb}{aa} \times (xx - \frac{1}{4}aa)$ pour l'équation à ce diamètre, quel que soit d'ailleurs l'angle

compris entre les deux diamètres conjugués. Mais si menant, par le point m' , la ligne $m'O'$ parallèle au diamètre CM , on nomme y' la ligne $m'O'$, qui est alors une ordonnée au diamètre NN' ; & si l'on nomme x' l'abscisse CO' , on aura $x' = y$, & $y' = x$, ce qui changera l'équation en $x'x' = \frac{bb}{aa} (y'y' - \frac{1}{4}aa)$ qui donne $y'y' = \frac{aa}{bb} (x'x' + \frac{1}{4}bb)$; d'où l'on voit que l'équation, par rapport au diamètre conjugué NN' , n'est pas semblable à celle que l'on trouve pour le diamètre MM' terminé à la courbe.

A l'égard de la parabole, nous avons vu (366) qu'en prenant les abscisses sur un diamètre quelconque, depuis l'origine de ce diamètre, & prenant les ordonnées parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, l'équation étoit toujours $yy = px$, en nommant y l'ordonnée, x l'abscisse & p le paramètre de ce diamètre.

Enfin à l'égard de l'hyperbole considérée, par rapport à ses asymptotes, en prenant les abscisses depuis le centre, sur une des asymptotes, & les ordonnées parallèles à l'autre asymptote, nommant les premières x , les secondes y , & aa la puissance de l'hyperbole, l'équation de l'hyperbole sous ce dernier aspect est $xy = aa$.

370. Mais il faut bien remarquer que pour que ces équations se rapportent aux lignes auxquelles nous venons de les rapporter, il est essentiel que l'une des indéterminées, que y , par exemple, se compte depuis la ligne même sur laquelle les x sont comptés; car on pourroit avoir une équation de quelqu'une des formes que nous venons de parcourir, & qui cependant ne se rapporteroit point aux diamètres conjugués, si cette équation est à l'ellipse ou à l'hyperbole; ou qui lorsqu'elle appartient à une parabole, n'exprimerait point

la relation entre les abscisses & ce que nous avons appelé jusqu'ici les *ordonnées* ; par exemple, si (fig. 53) CM' , CN sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, à l'égard desquels on ait l'équation $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, CM' étant $\frac{1}{2}a$; CN , $\frac{1}{2}b$; CQ , x ; & QM , y ; si par le centre C on tire une droite indéfinie FCE qui rencontre les ordonnées QM en E ; si l'on nomme les lignes CE , z ; qu'enfin par un point B pris à une distance connue $BC = m$, on mène BF parallèle à QM , & qu'on nomme CF , n ; alors les triangles semblables CBF , CQE , donnent $m : n :: x : z$, donc $x = \frac{mz}{n}$; si on substitue cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, elle deviendra.

$$yy = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{4}aa - \frac{mmzz}{nn} \right) \text{ ou } aannyy = \frac{1}{4}aabbnn - bbmmzz,$$

ou (en divisant le second membre par $bbmm$ & indiquant en même temps la multiplication par $bbmm$) $aannyy = bbmm \left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz \right)$, ou enfin $yy = \frac{bbmm}{aann} \left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz \right)$, équation de même forme , mais que l'on auroit tort , comme on le voit , de regarder comme appartenant aux diamètres conjugués ; car les abscisses z étant prises sur CE , les ordonnées y ou QM se comptent du point Q où la ligne EM parallèle à CN rencontre CM' .

371. On voit donc , en général , 1°. que si l'on a une équation du second degré , à deux indéterminés x & y , & si l'une des indéterminées se compte depuis la ligne sur laquelle l'autre se compte , cette équation appartiendra à l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, ou au cercle, si ne renfermant d'autres puissances de x & y que les quarrés, ces deux quarrés se trouvent avec différens signes dans différens membres, & si en même temps la quantité toute

connue qui se trouve dans un même membre avec le carré qui aura le signe $-$, a elle-même le signe $+$; car si l'on avoit, par exemple, $yy = \frac{bb}{aa} (-\frac{1}{4}aa - xx)$; cette équation n'exprimerait aucune ligne possible; puisqu'elle donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{aa} (-\frac{1}{4}aa - xx)\right]}$, quantité absurde (98).

372. 2°. Si les deux carrés yy & xx , passés dans différens membres, ont le même signe, & s'il n'y a d'autres puissances de x & de y que ces carrés, l'équation appartiendra toujours à une hyperbole, laquelle sera rapportée à un diamètre terminé à la courbe ou à son conjugué selon que le terme tout connu, aura le même signe que les carrés xx & yy , ou des signes différens.

373. 3°. Si l'équation ne renferme que l'un des carrés & n'a que deux termes dont le second soit le produit de l'autre indéterminée, par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole rapportée à l'un de ses diamètres, si ces deux termes placés dans différens membres ont le même signe; mais s'ils ont différens signes, l'équation n'exprime aucune ligne possible.

374. 4°. Enfin si l'équation n'ayant que deux termes, l'un est le produit des deux indéterminées x & y , & l'autre une quantité toute connue, elle exprime une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

375. Telles sont les équations aux sections coniques rapportées aux différentes lignes auxquelles nous venons de les rapporter. Nous en verrons l'usage dans peu; mais il n'est pas inutile de dire d'avance que toutes les fois qu'on aura une équation à deux indéterminées x & y qui aura les conditions que nous venons d'exposer, il sera toujours facile

de construire la section conique à laquelle elle appartiendra , & cela en se conduisant comme dans cet exemple,

Supposons qu'on ait l'équation $ncd - qyy = gxx$; je l'écrirais ainsi $qyy = ncd - gxx$; divisant le second membre par g & indiquant, en même temps, la multiplication par g , $qyy = g \left(\frac{ncd}{g} - xx \right)$, & enfin $yy = \frac{g}{q} \left(\frac{ncd}{g} - xx \right)$; or sous cette forme, je vois (309 & 371) que cette équation appartient à une ellipse dont le rapport des quarrés de deux diamètres conjugués est $\frac{g}{q}$, & dont le quarré de celui de ces diamètres sur lequel les x sont comptés, est $\frac{4ncd}{g}$.

En effet, comparant cette équation, à l'équation.
 $yy = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{4}aa - xx \right)$; j'ai $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, & $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$.

De ces deux équations, on tire $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, & $b = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$, ce qui détermine les deux diamètres conjugués. Quant à l'angle que font ces deux diamètres conjugués, c'est celui que font les lignes x & y , angle qui est censé connu par la question qui aura conduit à l'équation $ncd - qyy = gxx$. Or nous avons vu (316) comment, connoissant ces trois choses, on peut décrire l'ellipse.

On se conduira de même pour les équations aux autres sections, lorsqu'elles se rapporteront à quelques-unes de celles que nous avons exposées ci-dessus. Nous allons voir qu'en général toute équation du second degré à deux indéterminées, exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune ligne possible (*); & cela se démontre en faisant

(*) Il faut seulement en excepter le cas où elle seroit le produit de deux facteurs du premier degré tels que $ax + by + c$ & $dx + fy$	$+g$; auquel cas même, elle n'est pas réellement du second degré ; mais ce cas ne pouvant nous servir, nous ne nous en occuperons point.
---	---

voir que toute équation pareille peut toujours être ramenée à quelqu'une de celles que nous avons données ci-dessus. Nous allons en donner la méthode ; mais pour répandre plus de jour sur l'usage de cette méthode & sur les constructions auxquelles elle conduit , il est à propos de placer ici les réflexions suivantes.

376. Puisque toute question qui peut être résolue par l'Algèbre conduit toujours à une ou plusieurs équations, toute équation à deux indéterminées, u & t , peut toujours être considérée comme venant d'une question où ces deux indéterminées u & t représentoient les deux inconnues. Quelle qu'ait été cette question, on peut toujours considérer l'équation comme exprimant la nature d'une courbe ; & cela est bien facile à concevoir ; car si l'on donne arbitrairement & successivement à l'une des deux inconnues, à u , par exemple, plusieurs valeurs ; & qu'à l'aide de l'équation & des règles de l'Algèbre, on calcule à chaque fois la valeur de t , il est évident que rien n'empêche de marquer sur une ligne indéfinie AR (*fig. 53, 54 & 55*) les valeurs $AP, AP, \&c.$ qu'on a données à u , de mener par les points $P, P, \&c.$ des lignes $PM, PM, \&c.$ parallèles entre elles & sous un angle déterminé, & de faire ces dernières égales aux valeurs correspondantes qu'on a trouvées pour t : la suite des points $M, M, \&c.$ déterminés de cette manière, formera une courbe dont la nature dépendra du rapport des lignes AP & PM , & puisque ce rapport est exprimé par l'équation dont ces lignes ont été déduites, cette équation exprime donc la nature de cette courbe.

Cela posé, concevons que la courbe soit une section conique : il est clair que, comme dans la question qui a donné cette équation, on ignoroit, ou l'on pouvoit ignorer

totalément si un pareil usage de cette équation donneroit une section conique, on n'a pas cherché à disposer les lignes AP & PM de manière que l'une ayant sa direction sur un diamètre, l'autre fût parallèle à la tangente menée par le sommet de ce diamètre, ce qui est d'abord nécessaire pour que l'équation ait l'une des formes ci-dessus. On voit donc par-là comment il peut se faire qu'une équation, quoique n'ayant pas l'une de ces formes, appartienne néanmoins à une section conique.

377. Voyons donc maintenant comment on peut ramener toute équation du second degré, & qui renferme deux indéterminées, à avoir l'une des formes que nous avons vues appartenir aux sections coniques rapportées aux lignes auxquelles nous les avons rapportées (369).

378. La méthode que nous allons exposer, suppose qu'on sache faire disparaître le second terme dans une équation du second degré à une inconnue. La règle pour cette opération est simple: il faut égaler l'inconnue augmentée (ou diminuée si le second terme a le signe —) de la moitié du coefficient ou multiplicateur de x dans le second terme, à une nouvelle inconnue, après avoir préalablement dégagé le quarré de l'inconnue.

Par exemple, pour faire disparaître le second terme de l'équation $4x^2 + 12x = 9$, je divise par 4, & j'ai $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; je fais $x + \frac{3}{2} = z$; en quarrant, j'ai $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$, & par conséquent $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; substituant dans l'équation $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, j'ai $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, ou $zz = \frac{18}{4}$, équation qui n'a plus de second terme.

Si j'avois $x^2 - 4x = 7$, je ferois $x - 2 = z$; quarrant, j'aurois $x^2 - 4x + 4 = zz$, ou $x^2 - 4x = zz - 4$;

d'où, en substituant, il vient $zz - 4 = 7$, ou $zz = 11$, équation sans second terme.

379. On peut même, si on le veut, égaler l'inconnue augmentée de la moitié du coefficient du second terme; non à une inconnue simple, mais à une inconnue multipliée ou divisée par une quantité arbitraire; & cette remarque nous servira dans quelques momens.

Par exemple, dans l'équation $x^2 - 4x = 7$, au lieu de faire simplement $x - 2 = z$, comme ci-dessus, je puis faire $x - 2 = \frac{k}{n} z$; j'aurai, en opérant toujours de la même manière, $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, & par conséquent $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$; d'où, en substituant, on tire $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$, & par conséquent $\frac{kk}{nn} zz = 11$: on n'en aura pas moins la même valeur pour x , quelque valeur qu'on donne à k & à n ; en effet cette équation donne $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$; & puisque $x - 2 = \frac{k}{n} z$, on a $x - 2 = \sqrt{11}$; précisément comme par le premier procédé. En un mot, cela ne change rien à ce que l'on cherche; mais en introduisant ainsi une quantité arbitraire, on se ménage les moyens de remplir certaines vues, auxquelles on ne satisferoit quelquefois que d'une manière indirecte, ou moins simple, en s'y prenant autrement.

Moyens de ramener aux Sections coniques, toute Équation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible.

380. Supposons qu'on ait l'équation $dt + cut + euv + fdt + geu + kd^2 = 0$, qui renferme toutes les équations
du

du second degré à deux indéterminées u & t , dont aucun terme ne manque. Concevons que cette équation appartienne à une courbe MM (fig. 53 & 54) dont AP & PM sont les coordonnées. Voici comment on s'assurera que cette courbe est toujours une section conique, & comment on déterminera cette section.

Il faut, lorsqu'il ne manque aucun des deux quarrés t^2 & u^2 , faire disparaître successivement, le second terme de cette équation par rapport à t , & le second terme par rapport à u , ce que l'on fera de la manière suivante.

Après avoir renfermé entre deux crochets tout ce qui multiplie la première puissance de t , je dégage tt , & j'ai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{cuu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0..(A)$. Je fais donc (378) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; en quarrant, j'aurai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} = yy$, & par conséquent $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t = yy - \frac{1}{4}ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$: substituant dans l'équation (A), & transposant ensuite pour laisser yy seul; j'ai $yy = \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{cuu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$, ou, en multipliant tout par $4dd$, & rassemblant ensuite les termes qui sont multipliés par des puissances semblables de u , $4ddy = ffd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$.

Comme les quantités d, c, e, f , &c. représentent des quantités connues, on peut, pour abréger le calcul, représenter $ffd - 4hd^3$ par une seule lettre r ; représenter de même, $2cfd - 4ged$, par q ; & $cc - 4de$, par m ; l'équation deviendra $4ddy = r + qu + mu^2$, m, q, r pouvant être positives ou négatives.

Marine. Algèbre.

E e

Faisons maintenant disparaître le second terme par rapport à u ; & pour cet effet, commençons par dégager uu , ce qui donne $u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy \dots (B)$. Mais, au lieu de faire simplement $u + \frac{q}{2m} =$ à une nouvelle indéterminée x , selon la règle donnée (378), je le fais $= \frac{qx}{2mn}$ (379); c'est-à-dire, égal à une nouvelle indéterminée x multipliée par la moitié du coefficient du second terme, & divisée par une quantité arbitraire n inconnue pour le moment, mais que nous déterminerons dans peu (*).

J'ai donc $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; quarrant, il me vient $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mnn}$, ou $uu + \frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mnn} - \frac{qq}{4mm}$. Substituant dans l'équation (B), j'ai $\frac{qqxx}{4mnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, équation qui appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, tant qu'aucune des quantités d, m, q, r , &c. n'est zéro; excepté le cas où nous allons voir qu'elle n'exprimerait aucune ligne possible.

Examinons maintenant dans quels cas la courbe est une ellipse, dans quels cas une hyperbole, & enfin dans quels cas il n'y a pas de courbe.

Pour cet effet, dégageons yy , & nous aurons $yy = \frac{qqxx}{16mndd} - \frac{qq}{16mdd} + \frac{r}{4dd}$, ou, en divisant le second

(*) Cette quantité n est introduite pour pouvoir ramener directement l'équation, aux diamètres conjugués. Si l'on égalait simplement à x , l'équation finale acquerrait la forme de l'équation à l'ellipse ou à l'hyperbole, mais elle serait dans le cas que nous avons examiné (370).

membre par le coefficient de xx , & indiquant en même temps la multiplication par ce même coefficient, $yy =$

$$\frac{qq}{16mnndd} \left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq} \right), \text{ équation dans laquelle}$$

les quantités q , n & d étant au quarré, les signes ne peuvent changer que lorsque m ou r , au lieu d'être positifs, seront négatifs; mais le changement du signe de r n'en apportant aucun à ceux des quarrés yy & xx , la courbe ne change point par le changement du signe de r . A l'égard de m ,

s'il est négatif, l'équation est alors $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times$
 $\left(xx - nn - \frac{4mrnn}{qq} \right)$, ou (en changeant les signes en

haut & en bas) $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times \left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx \right)$.

On voit donc (371 & 372) que tant que m sera positif, la courbe sera une hyperbole; & qu'au contraire, elle sera une ellipse, quand m sera négatif; or la quantité m a représenté ci-dessus $cc - 4de$, & dans cette dernière, la quantité c étant au quarré, cc est toujours positif, donc m ou $cc - 4de$ ne peut devenir négatif qu'autant que $4de$ surpassera cc , & cela, soit que d & e soient tous deux positifs, soit qu'ils soient tous deux négatifs.

381. Donc si l'on veut savoir dans quels cas une équation du second degré, à deux indéterminées u & t , telle que $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, il n'y a qu'à examiner si le quarré ce du coefficient du terme ut , moins le quadruple du produit de des coefficients de t^2 & de u^2 , fait une quantité positive ou négative; dans le premier cas, la courbe sera une hyperbole; & dans le second cas, une ellipse, à moins que d ne soit $= e$; alors la courbe peut être un cercle, ainsi qu'on le verra plus bas.

Il faut seulement excepter de cette règle, le cas où r étant

négalif, feroit plus grand que $\frac{qq}{4m}$ pour l'ellipfe; car alors la quantité $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ devenant $nn - \frac{4mrnn}{qq}$, ou $nn \left(1 - \frac{4mr}{qq}\right)$, eft négative fi $\frac{4mr}{qq}$ eft plus grand que 1; ou, ce qui revient au même, fi $4mr$ eft plus grand que qq , ou enfin fi r eft plus grand que $\frac{qq}{4m}$, ce qui rend la valeur de y , & par conféquent la courbe, imaginaire.

Il reffe à faire voir comment on peut décrire l'ellipfe & l'hyperbole que nous venons de reconnoître: confidérons l'ellipfe.

382. Des deux équations $t + \frac{1}{2}f + \frac{c^2u}{2d} = y$, & $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que nous avons eues pour faire difparoître les feconds termes, la feconde, par la fuppoñition aétuelle, que m eft négative, fe change en $u - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$; mais comme n eft une quantité introduite arbitrairement, on peut la fuppofer indifféremment pofitive ou négative; en la fuppoñant négative, on a $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; conftruifons ces deux équations pour avoir la pofition des diamètres conjugués.

La première, favoir $t + \frac{1}{2}f + \frac{c^2u}{2d} = y$, fait voir que pour avoir y , il faut augmenter chaque t de la quantité $\frac{1}{2}f + \frac{c^2u}{2d}$; on menera donc, par le point A , origine des u & des t , (*fig. 53*) la ligne $AB = \frac{1}{2}f$, parallèle aux lignes PM ou t . Par le point B , on menera BKI parallèle à la ligne AR , fur laquelle fe comptent les u , & ayant pris arbitrairement la ligne BK , on menera parallèlement à AB , la ligne KL qui foit à $BK :: \frac{1}{2}c : d$; fi l'on tire par les

points B & L la ligne indéfinie BLQ , alors les lignes QM comptées des points Q où cette ligne coupe les lignes PM , seront les valeurs de y . En effet, on a $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = e + \frac{1}{2}f + IQ$; or les triangles semblables BKL & BIQ , donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : IQ$; c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$; donc $QM = e + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Puisque les y se comptent depuis la ligne LQ , il s'ensuit (370) que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, les x doivent être comptés sur la ligne BLQ , & que le point d'où ils seront comptés, sera le centre; en sorte que QLB est la direction d'un des diamètres. Voyons à déterminer ce centre.

La seconde équation $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, fait voir que si sur AP ou u , on prend $AG = \frac{q}{2m}$, la quantité GP qui vaut $AP - AG$, vaudra $u - \frac{q}{2m}$, & par conséquent $\frac{qx}{2mn}$, on a donc $GP = \frac{qx}{2mn}$; or si par le point G , on mène NGC parallèle aux lignes PM , le point C où elle rencontrera LQ , sera l'origine des x , & par conséquent le centre; en effet, nous venons de voir que les x devoient être comptés sur LQ ; or, lorsque GP est zéro, sa valeur $\frac{qx}{2mn}$ doit être zéro; x doit donc être zéro alors, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les x commenceront au point C : ainsi les lignes QM étant y , les lignes CQ sont x . De-là il est facile d'avoir la valeur de n ; car on a $GP = \frac{qx}{2mn}$, ou (en mettant pour x , sa valeur CQ , & pour $\frac{q}{2m}$, sa

valeur AG) $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; donc $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mais les parallèles QP , CG & AB , donnent $GP : AG :: CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; on a donc $n = BC$; c'est-à-dire, que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués dont les directions sont QB & CN , il faut mettre pour n , la valeur de BC , qui est déterminée par les constructions précédentes.

Il ne reste donc plus, pour être en état de décrire cette ellipse, qu'à déterminer la grandeur des diamètres conjugués; car l'angle BCN qu'ils font entre eux, se trouve déterminé par les opérations précédentes. Or cela est facile, en imitant ce que nous avons fait (375). Il ne s'agit que de comparer l'équation $yy = \frac{qq}{16mddnn} \left(nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx \right)$, à l'équation $yy = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{4}aa - xx \right)$. Cette comparaison donne $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$ & $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; donc $a = \sqrt{4nn + \frac{16mnnr}{qq}}$, & $b = \sqrt{\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}}$; & puisque n, m, q, r, d sont toutes des quantités connues, on a donc les valeurs des diamètres conjugués a & b , avec lesquelles, & connoissant d'ailleurs l'angle BCN qu'ils doivent faire, on décrira l'ellipse de la manière qui a été enseignée (316).

383. Remarquons que si les valeurs de a & de b sont égales, & qu'en même temps l'angle BCN soit droit, la courbe est alors un cercle. Si l'on veut déterminer dans quels cas cela aura lieu, il n'y a, 1°. qu'à supposer dans notre équation à l'ellipse, que $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, c'est-à-dire

que $qq = 16mddnn$, ce qui donne $nn = \frac{qq}{16mdd}$. 2°. Si l'angle BCD est droit, on doit avoir $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; or $BC = n$; & les triangles semblables, BCD , BLK , donnent $BK : KL :: BD$ ou $AG : CD , c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, d'où l'on tire $CD = \frac{qc}{4md}$; donc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, ou $m + cc = 4dd$; mais puisque m est négatif, on a $cc - 4de = -m$, ou $m = 4de - cc$; il faudra donc que $4de = 4dd$, ou que $d = e$.$

384. On voit donc que pour savoir si la courbe est un cercle, une ellipse, ou une hyperbole, il est inutile d'avoir égard aux trois derniers termes fdt , geu , & hd^2 de l'équation, $d^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; cela dépend seulement des trois premiers, en sorte que si d , c & e sont tels que $cc - 4de$ soit positif, la courbe sera une hyperbole; elle sera une ellipse, si au contraire $cc - 4de$ est négatif, excepté le cas où l'on aura en même temps $d = e$, c'est-à-dire, où les deux quarrés x^2 & t^2 auront le même coefficient; alors elle sera un cercle si l'angle des nouvelles coordonnées est droit.

385. Tout ce que nous venons de dire, à l'exception de ce que renferme le n°. 383, s'applique également à l'hyperbole, c'est-à-dire, à l'équation $yy = \frac{qq}{16mnndd} \left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq} \right)$, à la différence des signes près. Ainsi en relisant tout ce qui précède & l'appliquant à la figure 54, il n'y a d'autre changement à faire que de porter AG à l'opposite de AP , ce qui est indiqué par l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$,

que l'on a eue d'abord (380). Du reste, tout est le même, en changeant le mot *ellipse* en celui d'*hyperbole*.

Dans les différens cas particuliers, les quantités AG , BK , AB , KL (fig. 53 & 54), peuvent se trouver disposées tout au contraire de ce qu'on le voit ici; mais ces changemens seront toujours indiqués par les signes des quantités d , c , f , m , q , &c. dans les équations $x + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, & $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ que l'on a en faisant disparaître les seconds termes.

386. Il nous reste deux cas à examiner: ce sont, 1°. celui où l'on auroit $cc - 4de = 0$; 2°. celui où l'on auroit tout à la fois $d = 0$, & $e = 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $cc - 4de = 0$, ou $cc = 4de$, la courbe est une parabole. Comme la quantité m est alors zéro, la construction précédente devient inutile; parce qu'après avoir fait évanouir le second terme par rapport à x , le terme u^2 ne s'y trouve plus. Ce cas se reconnoît facilement en examinant si dans l'équation, on a $cc = 4de$, c'est-à-dire, si les trois termes x^2 , ux & u^2 forment un quarré; car de ce que $cc = 4de$, on déduit $c = 2\sqrt{de}$, ce qui change les trois premiers termes de l'équation, en $dx^2 + 2ux\sqrt{de} + eu^2$, qui est le quarré de $x\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Dans ce cas on fera, comme ci-devant, disparaître le second terme, par rapport à x , & alors l'équation se réduira en opérant mot à mot, comme ci-dessus, à $4ddy = r + qu$; alors pour ramener cette dernière à la forme $yy = px$, qui (369) est celle de la parabole rapportée à un diamètre dont les ordonnées sont parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, on dégagera yy , ce qui

donne $yy = \frac{r + qu}{4dd}$; on fera ce second membre égal à une nouvelle indéterminée x , multipliée par un nombre n que l'on déterminera comme on va le voir; c'est-à-dire, qu'on fera $\frac{r + qu}{4dd} = nx$; alors on aura $yy = nx$. Il ne s'agira donc plus que de construire l'équation $z + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, qui a servi à faire disparaître le second terme, par rapport à z , & l'équation $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, qui aura servi à la seconde réduction. La première de ces deux équations étant précisément la même que celle que nous avons construite (382), se construira de même ici; ainsi il n'y a qu'à appliquer à la figure 55, mot à mot, ce qui a été dit (382) pour la figure 53 relativement à la construction de $z + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, les y seront les lignes QM (fig. 55), & l'on aura BLQ pour la direction du diamètre sur lequel les x doivent être comptés.

Pour déterminer l'origine des x , & par conséquent le sommet de ce diamètre, on emploiera l'équation $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, qui donnant $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, fait voir que si l'on prend à l'opposite de AP , la quantité $AG = \frac{r}{q}$, on aura $GP = \frac{4ddnx}{q}$; puisque $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; donc si par le point G on mène GCD parallèle aux lignes PM , & qui rencontre QLB en C , le point C sera l'origine des x , puisque l'équation $GP = \frac{4ddnx}{q}$ fait voir que quand GP est zéro, x doit être zéro, & que d'ailleurs les x devant être comptés sur

la ligne de laquelle partent les y , doivent être comptés sur BQ .

Il ne s'agit plus que de déterminer le paramètre n . Or on vient de voir que $GP = \frac{4ddnx}{q}$; mais les parallèles CD & QI donnent $BC : BD$ ou $AG :: CQ : DI$ ou GP ; c'est-à-dire, $BC : \frac{r}{q} :: x : \frac{4ddnx}{q}$; donc $BC = \frac{r}{4ddn}$; donc $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; or r & d sont donnés dans l'équation, & BC est déterminé par la construction; on connoît donc n ou le paramètre; d'ailleurs cette même construction détermine en même temps l'angle des coordonnées CQ & QM ou x & y ; il est donc aisé de construire la parabole selon qu'il a été enseigné (367).

387. Puisque l'équation générale appartient à la parabole lorsqu'on a $cc = 4de$, il s'ensuit que lorsque le produit ut des deux indéterminées ne se trouve point dans cette équation, il faut pour qu'elle appartienne à la parabole, qu'il y manque aussi un des deux quarrés t^2 ou u^2 ; car c étant alors zéro, l'équation $cc = 4de$ ou $0 = 4de$, fait voir que d ou $e = 0$.

388. Si les deux quarrés sont tous deux dans l'équation, & que le produit ut ne s'y trouve point, alors la construction donnée (382) & qui convient aux figures 53 & 54, devient plus simple, parce c étant zéro, la ligne KL est zéro, & BL tombe sur BK , qui devient alors un diamètre, les lignes des x & des y sont donc parallèles à celles des u & des t . Dans ce même cas l'évanouissement du second terme par rapport à u se fera sans employer l'inconnue n , parce que BC qui est n (382) étant alors égal à BD ou

AG, on a $n = \frac{q}{2m}$, ce qui réduit l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{q^2}{2mn}$ qu'on a eue pour faire disparaître le second terme, par rapport à u , à celle-ci $u + \frac{q}{2m} = x$.

Il suit de-là, qu'outre les conditions mentionnées (384), il faut dans le cas présent, pour que la courbe soit un cercle, que l'angle des coordonnées u & t soit droit.

389. Lorsque le produit ut se trouve dans l'équation, si après avoir fait évanouir le second terme par rapport à l'une des deux indéterminées, par exemple, par rapport à t , il ne se trouvoit plus d'autre puissance de l'indéterminée u , que le quarré, alors quoiqu'il n'y ait plus de second terme à faire disparaître, il n'en faudroit pas moins faire une transformation qui consisteroit à faire $u = \frac{lx}{n}$, $\frac{l}{n}$ étant une fraction inconnue, mais que l'on détermineroit lors de la construction, d'une manière semblable à ce que nous venons de faire (382). Nous en donnerons un exemple plus bas.

390. Si des trois termes t^2 , ut & u^2 , il ne manque que l'un des deux quarrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole, ou n'exprime aucune courbe; parce que si d ou e est zéro, la quantité $cc - 4de$ se réduisant à cc , est essentiellement positive (384).

391. Enfin si les deux quarrés t^2 & u^2 manquent en même temps, auquel cas on a une équation de cette forme, $gut + ht - ku - l = 0$; g, h, k, l pouvant être indifféremment positifs ou négatifs, on ne peut encore faire usage de la construction donnée (382). L'équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; mais comme les

abscisses & les ordonnées ne sont point comptées du centre, on les y ramènera de la manière suivante.

On dégagera le produit ut ; ce qui donnera $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. On fera la somme des quantités qui multiplient u égale à une indéterminée y , c'est-à-dire, $t - \frac{k}{g} = y$; ce qui donne $t = y + \frac{k}{g}$; substituant dans l'équation $ut + \frac{ht}{g}, \&c. = 0$; on aura $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$; après cette transformation, on fera la somme de toutes les quantités qui multiplient y , égale à une nouvelle indéterminée x , c'est-à-dire, $u + \frac{h}{g} = x$, ce qui réduira l'équation à $xy + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, ou $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ qui appartient à l'hyperbole entre ses asymptotes, les abscisses x étant comptées depuis le centre sur une des asymptotes, & les ordonnées y étant comptées depuis cette asymptote parallèlement à l'autre; enfin la puissance de cette hyperbole est $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (347).

Pour construire cette hyperbole, on construira, de la manière suivante, les deux équations $t - \frac{k}{g} = y$, & $u + \frac{h}{g} = x$ qui ont servi à réduire. La première fait voir qu'il faut diminuer chaque t de la quantité $\frac{k}{g}$ pour avoir y . On menera donc par le point A (*fig. 56*) origine des u & des t , une ligne AB parallèle aux lignes PM ou t , & égale à $\frac{k}{g}$: tirant ensuite par le point B la ligne CBQ parallèle à AP , les lignes QM seront les y , puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Pour avoir les x , l'équation $u + \frac{h}{g}$ fait voir qu'il faut augmenter les u , c'est-à-dire, les lignes AP , de la quantité $\frac{h}{g}$; on portera donc à l'opposite de AP , la ligne $AG = \frac{h}{g}$, & tirant GS parallèle aux lignes PM & qui rencontre BQ en C , CQ sera x & C sera le centre de l'hyperbole dont CQ & CS seront les asymptotes: ayant les asymptotes & l'équation $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, on décrira l'hyperbole de la manière qui a été enseignée (354).

Si les trois premiers termes t^2 , ut & u^2 manquoient dans l'équation, alors elle n'exprimerait plus qu'une ligne droite dont la construction est facile, après ce que nous avons dit sur la construction des équations qui ont servi aux réductions précédentes.

392. Ainsi, 1°. toute équation du second degré à deux indéterminées, & qui n'est point décomposable en deux facteurs du premier degré, tels que $mx + ny + q$, exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune courbe possible. 2°. Cette courbe est ellipse, ou hyperbole, ou parabole, selon que le carré du coefficient du produit ut des deux indéterminés, moins le quadruple du produit des coefficients des deux carrés t^2 & u^2 est négatif, ou positif, ou zéro; & en particulier elle peut être un cercle, lorsque ce même résultat étant négatif, les coefficients de u^2 & de t^2 sont égaux. 3°. Et pour ramener toute équation appartenante à une section conique, aux équations que nous avons données en traitant de ces courbes, il faut se conformer à ce qui a été enseigné (380, 386, 388, 389 & 391).

Application de ce qui précède, à la résolution de quelques questions indéterminées.

393. Pour faire connoître l'usage des transformations que nous venons d'enseigner, proposons-nous pour première question, de *Trouver quelle est la courbe* (fig. 57) *dont les distances de chaque point M à deux points fixes A & B seroient toujours dans un même rapport, marqué par celui de g à h.*

Imaginons que de chaque point *M*, on ait abaissé une perpendiculaire *MP* sur la ligne *AB*; cherchons la relation de ces perpendiculaires, avec leurs distances *AP* au point *A*; & pour cet effet nommons *AP*, *u*; *PM*, *t*, & la ligne connue *AB* = *c*.

Cela posé, le triangle rectangle *APM* donne $AM = \sqrt{(AP)^2 + (PM)^2} = \sqrt{uu + tt}$, & le triangle rectangle *BPM* donne $BM = \sqrt{(BP)^2 + (PM)^2}$; or $BP = AP - AB = u - c$; donc $BM = \sqrt{u^2 - 2cu + cc + tt}$; puis donc que l'on veut que $AM : BM :: g : h$, on aura $\sqrt{uu + tt} : \sqrt{u^2 - 2cu + cc + tt} :: g : h$; donc $h \sqrt{uu + tt} = g \sqrt{u^2 - 2cu + cc + tt}$, ou, en quarrant, $hh uu + hh tt = gg uu - 2ggcu + ggcc + gg tt$, ou $(gg - hh) uu + (gg - hh) tt - 2ggcu + ggcc = 0$, équation qui (384) appartient au cercle, puisque les deux quarrés *uu* & *tt*, ont, dans le même membre, le même signe & le même coefficient.

Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (369), je vois que n'y ayant point de second terme par rapport à *t*, il suffit à l'égard de cette indéterminée, de supposer $t = y$, ce qui donne $(gg - hh) uu + (gg - hh) yy - 2ggcu + ggcc = 0$; il faut donc, à présent;

faire disparaître le second terme par rapport à u ; & comme le produit ut ne se trouve point dans l'équation , il suffit (388) d'employer la règle donnée (378). Je dégage donc

$$uu, \text{ \& j'ai } uu - \frac{2ggcu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy; \text{ je fais }$$

$$u - \frac{ggc}{gg - hh} = x; \text{ quarrant, \& substituant au lieu du pre-}$$

$$\text{mier membre } uu - \&c., \text{ la valeur } xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} \text{ qu'on}$$

$$\text{aura par cette opération, il me vient } xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} =$$

$$\frac{-ggcc}{gg - hh} - yy, \text{ ou } yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx, \text{ équation}$$

qui étant comparée à l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me

$$\text{donne } \frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}, \text{ \& par conséquent le rayon}$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}. \text{ Il ne s'agit donc plus que de déterminer}$$

le centre , qui doit être sur ABP , puisqu'on a $t = y$.

Or l'équation $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$, qui a servi à réduire,

fait voir que pour avoir x , il faut diminuer u de la quan-

$$\text{tité } \frac{ggc}{gg - hh}; \text{ on prendra donc } AC = \frac{ggc}{gg - hh}, \text{ \& alors}$$

CP sera x , puisqu'il vaut $AP - AC$, c'est-à-dire, $u -$

$$\frac{ggc}{gg - hh}; \text{ ainsi du point } C \text{ comme centre, \& du rayon}$$

$$\frac{hgc}{g^2 - h^2} \text{ on décrira un cercle; chaque point } M \text{ de ce cercle}$$

aura la propriété dont il s'agit.

Au reste , on peut trouver le centre & le rayon d'une manière assez simple , par le moyen de la première équation

$$uu - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy; \text{ car puisque le centre}$$

doit être sur AP , ainsi qu'on vient de le remarquer, si

l'on fait $y = 0$, on aura, en résolvant l'équation , les

deux valeurs de u qui expriment les distances AD , AE

auxquelles le cercle DME rencontre la droite AB ; prenant donc le milieu de DE , on aura le centre & le rayon CE .

Or si l'on résout l'équation $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh}$, on aura $u = \frac{g^2c}{gg - hh} \pm \sqrt{\frac{gg h h c c}{(gg - hh)^2}} = \frac{g^2c \pm ghc}{gg - hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g - h)(g + h)}$ qui donne ces deux valeurs $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, & $u = \frac{gc}{g - h} = AE$.

394. Nous prendrons pour seconde question, celle-ci; *Trouver hors de la ligne donnée AR (fig. 58) tous les différents points M, tels qu'en tirant aux deux points A & R, les lignes MA, MR, l'angle AMR soit toujours égal à un même angle donné.*

Représentons par r le rayon des tables, & par m la tangente de l'angle donné, auquel AMR doit être égal; abaïssons la perpendiculaire MP ; nommons AP , u ; PM , t ; AR , b : alors PR sera $b - u$.

Rappelons-nous ces trois propositions démontrées (Géom. 284, 285 & 278), savoir, que si A & B sont deux angles, on a

$$1^{\circ}. \sin. (A + B) = \frac{\sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A}{r};$$

$$2^{\circ}. \cos. (A + B) = \frac{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}{r};$$

$$3^{\circ}. \tan. (A + B) = \frac{r \sin. (A + B)}{\cos. (A + B)}.$$

Cela posé, les triangles rectangles APM , RPM donnent (Géom. 295) $AM : AP :: r : \sin. AMP$; $AM : PM :: r : \sin. MAP$ ou $\cos. AMP$; $RM : RP :: r : \sin. RMP$; $RM : PM :: r : \sin. MRP$ ou $\cos. RMP$; d'où l'on tire
 $\sin.$

$\sin. AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $\cos. AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; $\sin. RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; $\cos. RMP = \frac{r \times PM}{RM}$; donc puisque $AMR = AMP + RMP$, on aura, par les formules qu'on vient de rappeler, $\sin. AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$, & $\cos. AMR = \frac{r \times PM^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$; donc $\frac{r \sin. AMR}{\cos. AMR}$, ou $\tan. AMR = \frac{r \times AR \times PM}{PM^2 - AP \times RP}$; ou, en mettant les valeurs algébriques, & réduisant, $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$; ou $mtt + muu - mbu - rbtt = 0$, équation au cercle (384), ainsi qu'on devoit bien s'y attendre.

Pour déterminer le centre & le rayon, il faut ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Pour cet effet, je dégage tt , ce qui me donne $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = 0$; je fais (378) $t - \frac{rb}{2m} = y$; opérant comme à l'article cité, mon équation se change en $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = 0$. Reste donc à faire disparaître le second terme, par rapport à u ; & puisque le produit ut n'entre point dans l'équation, je fais (388) simplement $u - \frac{b}{2} = x$; opérant de la même manière, l'équation devient $yy - \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, ou $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, qui étant comparée avec l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me donne $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, & par conséquent le rayon $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$.

Pour trouver le centre, & déterminer en même temps ce rayon, l'équation $t - \frac{rb}{2m} = y$, m'apprend que si je mène AB parallèle à PM , c'est-à-dire, si j'élève au point A la perpendiculaire $AB = \frac{rb}{2m}$, & si je mène BCQ parallèle à AR , les lignes QM seront y , puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Mais l'équation $u - \frac{b}{2} = x$, me fait voir que si je prends sur AR la partie $AG = \frac{b}{2}$, GP fera x , puisque $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; donc si par le point G , je mène GC parallèle à PM , le point C sera le centre. D'ailleurs, si l'on tire AC , on aura, à cause de l'angle droit G , $AC = \sqrt{(AG)^2 + (GC)^2} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4}\right) + \left(\frac{rrbb}{4mm}\right)}$; AC fera donc le rayon.

Cette construction se réduit donc à élever sur le milieu de AR la perpendiculaire $GC = \frac{rb}{2m}$, & à décrire du point C comme centre & du rayon CA , un cercle: tout angle MAR qui aura son sommet à la circonférence de ce cercle, & qui passera par les points A & R , sera égal à l'angle donné. Or pour construire la quantité $\frac{rb}{2m}$, il n'y a autre chose à faire qu'à mener une droite AO , qui fasse avec AB l'angle BAO égal à l'angle donné, elle coupera GC au point cherché C ; car dans le triangle rectangle ABC , on a $r : \text{tang. } BAC :: AB : BC$ ou AG ; c'est-à-dire, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; donc AB ou $GC = \frac{rb}{2m}$.

On peut voir encore aisément, que tout se réduit à mener par le point A la ligne AO qui fasse avec AR ,

l'angle RAO égal au complément de l'angle donné : cette ligne coupera en C la perpendiculaire élevée sur le milieu de AR ; en sorte que C sera le centre, & CA le rayon.

395. De-là il est facile de résoudre la question suivante : *Connoissant la position des trois points R, A, R' (fig. 59), & les angles sous lesquels on voit les lignes RA, AR' , d'un certain point M , trouver ce point M .*

Sur les milieux G & G' des deux lignes RA & $R'A$, on élèvera les perpendiculaires GC & $G'C'$; par le point A , on menera les lignes AC & AC' faisant avec AR & AR' , chacune avec chacune, les angles $RAC, R'AC'$ égaux chacun au complément de l'angle $RMA, R'MA$ sous lequel la ligne correspondante est vue. Des points C & C' comme centres, & des rayons CA & $C'A$, on décrira deux cercles qui se couperont en A & en M : le point M sera le point cherché. C'est une suite évidente de la solution de la question précédente.

Ce problème peut servir à marquer, sur la carte d'un pays, la position d'un point d'où l'on a relevé trois objets connus.

Si les angles observés $RMA, R'MA$ étoient égaux aux angles $RR'A$ & $R'RA$, alors le problème ne seroit plus déterminé, les deux cercles se confondroient, & chaque point de leur circonférence satisferoit à la question.

396. Pour troisième question, il s'agira de trouver la courbe ou les courbes qui auroient la propriété suivante : *AZ, AT (fig. 60), sont deux lignes qui font entre elles un angle donné quelconque, il s'agit de trouver les courbes dont la distance de chaque point M à un point fixe F pris sur AZ ,*

soit toujours dans un même rapport avec la distance MT du même point M à la droite AT , cette distance étant mesurée parallèlement à AZ .

D'un point quelconque M de cette courbe, imaginons la ligne MP parallèle à AT , & la perpendiculaire MS sur AZ ; l'angle MPS est donné; c'est pourquoi son sinus & son cosinus sont censés connus; nous les nommerons p & q , en représentant par r le rayon des tables (*). Nommons AP , u , & PM , t ; la ligne connue AF , c .

Cela posé, dans le triangle rectangle, MPS , nous aurons (Géom. 295) $r : \sin. MPS :: MP : MS$, & $r : \sin. PMS$ ou $\cos. MPS :: PM : PS$; c'est-à-dire, $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$, & $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Donc $FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; or le triangle rectangle MSF donne $MF = \sqrt{(MS)^2 + (FS)^2}$; donc $MF = \dots\dots\dots$
 $\sqrt{\left(\frac{p^2 t^2}{r^2} + \frac{q^2 t^2}{r^2} - \frac{2qt}{r} + u^2 + \frac{2qc}{r} - 2cu + cc\right)}$;
ou (parce que (Géom. 281) $p^2 + q^2 = r^2$) on aura $MF = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2qt}{r} + u^2 + \frac{2qc}{r} - 2cu + cc\right)}$; puis donc que MF doit être à MT ou AP , dans un rapport donné, si l'on représente ce rapport par celui de g à h , on aura $\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qt}{r} + u^2 + \frac{2qc}{r} - 2cu + cc\right)} : u :: g : h$, &

(*) On peut supposer, comme nous le faisons ici, que les quantités p , q , r sont données par les Tables de Trigonométrie; mais on peut les déterminer par une construction simple en faisant un triangle rectangle qui ait un de ses angles aigus égal à l'angle donné MPS , & une hypoténuse telle que l'on voudra. En prenant celle-ci pour r , les deux autres côtés seront p & q .

par conséquent, $gu = h\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qu}{r} + u^2 + \frac{2qc}{r} - 2cu + cc\right)}$,
 ou en quarrant, & transposant ensuite, $h^2t^2 - \frac{2qh^2u}{r} +$
 $(h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2q}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$, équation
 qui renferme les sections coniques (380), & qui (392)
 appartiendra à l'ellipse si le carré de $-\frac{2qh^2}{r}$, moins le
 quadruple de h^2 multiplié par $h^2 - g^2$ est négatif; c'est-à-
 dire, si $\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$ ou $\frac{4q^2h^4 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$
 est négatif; ou (parce que $r^2 - q^2 = p^2$) si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$
 est négatif: au contraire, elle appartiendra à l'hyperbole,
 si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est positif. Elle fera à la parabole, si
 $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est zéro; c'est-à-dire, si $4r^2h^2g^2 = 4p^2h^4$,
 ou si $rg = ph$, enfin la courbe sera un cercle, lorsqu'on
 aura $h^2 = h^2 - g^2$, ce qui ne peut jamais avoir lieu qu'au-
 tant que g sera zéro, ou que h sera infini, parce que dans
 ce dernier cas on doit négliger g^2 vis-à-vis de h^2 .

Si l'on veut maintenant construire la courbe dans chacun
 de ces cas, il n'y a qu'à imiter ce que nous avons fait
 (380 & suiv.); comme nous avons, alors, opéré sur l'el-
 lipse, pour faire voir la similitude des opérations & des
 constructions à l'égard de ces deux courbes, nous allons
 ici appliquer à l'hyperbole ce qui a été fait au même en-
 droit cité, c'est-à-dire, chercher à ramener notre équation
 à la forme $yy = \frac{bb}{aa} (xx - \frac{3}{4}aa)$.

Je dégage donc t^2 dans l'équation trouvée ci-dessus, ce
 qui me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 -$
 $2cu + c^2 = 0$. Pour faire disparaître le second terme,

par rapport à t , je fais $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, ce qui en quarrant, & transposant ensuite, me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r} \right) t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, & par conséquent, en substituant, $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2} \right) u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Il faut donc maintenant faire disparaître le second terme par rapport à u , mais auparavant j'observe que les termes $-\frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2} \right) u^2$, ou $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{h^2}$, ou $\frac{r^2u^2 - q^2u^2 - g^2u^2}{r^2}$ se réduisent à $\frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$, & les deux termes $\frac{2cq^2u}{r^2} - 2cu$, ou $\frac{2cq^2u - 2cr^2u}{r^2}$ se réduisent à $-\frac{2cp^2u}{r^2}$; de même les deux termes $-\frac{c^2q^2}{r^2} + c^2$, se réduisent à $+\frac{c^2p^2}{r^2}$, parce que $r^2 - q^2 = p^2$. L'équation se change donc en $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} + \frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2} = 0$, ou chassant les dénominateurs, & faisant ensuite (pour faciliter le calcul) $p^2h^2 = r^2g^2 = r^2kk$, $r^2h^2y^2 + c^2h^2p^2 - 2ch^2p^2u + r^2k^2u^2 = 0$.

Dégageons donc u^2 , ce qui donne $u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}u + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$; & faisons $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, en introduisant l'inconnue n , parce que le produit ux se trouve dans l'équation primitive (380). Alors en opérant comme ci-dessus, nous aurons, après la substitution faite, $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2} - \frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4} + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$,

ou supprimant le facteur commun $\frac{h^2}{k^2}$, & laissant y^2 seul dans un membre, nous aurons $y^2 = -\frac{c^2 h^2 p^4 x^2}{r^4 k^2 n^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} + \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2}$, ou, divisant le second membre par le multiplicateur de x^2 , & indiquant en même temps la multiplication par le même multiplicateur, $y^2 = -\dots - \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2} \left(x^2 + \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} - nn \right)$; mais puisqu'il s'agit de l'hyperbole, il faut remarquer que la quantité $r^2 k^2$, qui n'est autre chose que $p^2 h^2 - r^2 g^2$, est négative, puisque, selon la remarque que nous venons de faire ci-dessus, $\frac{4r^2 h^2 g^2 - 4p^2 h^4}{r^2}$ ou $\frac{4h^2}{r^2} (r^2 g^2 - p^2 h^2)$ doit être positif pour que la courbe soit une hyperbole. Ainsi il faut rendre k^2 négatif, en observant, lorsqu'on voudra mettre sa valeur dans l'équation, de remettre pour cette valeur, la quantité $r^2 g^2 - p^2 h^2$, au lieu de $p^2 h^2 - r^2 g^2$; l'équation devient donc $y^2 = \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2} \left(x^2 - \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} - nn \right)$. Comparant cette équation avec $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(x^2 - \frac{1}{4} aa \right)$ pour déterminer les diamètres conjugués, on aura $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}$, & $\frac{1}{4} aa = \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} + nn$, d'où l'on tirera aisément a & b ; c'est-à-dire, les deux diamètres conjugués, que nous allons voir être les deux axes même de l'hyperbole.

Déterminons donc la direction des diamètres conjugués auxquels notre équation réduite se rapporte. Conformément à ce qui a été fait (382), il faut construire les deux équations $v + \frac{c^2 q}{r} - \frac{q^2 u}{r} = y$, & $u - \frac{c^2 h^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{c^2 h^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$; mais comme nous venons d'observer que k^2 est négatif dans le cas de l'hyperbole dont il s'agit ici, il faut changer cette

dernière en $u + \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{c h^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$; je ne change point le signe du terme affecté de x , quoique k^2 y entre , parce que la quantité n peut être prise arbitrairement positive ou négative. Il faut donc , en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité , mener par le point A parallèlement à PM la ligne $AB = \frac{c q}{r}$, & tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ , prendre arbitrairement sur le prolongement de cette ligne , la partie BK , & mener KL parallèle à PM , & telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$; alors si , par le point B & le point L , vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q , les lignes QM seront y . Car $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{c q}{r}$; or les triangles semblables BKL & BQI donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : QI$; c'est-à-dire , $r : q :: u : QI = \frac{q u}{r}$; donc $QM = t - \frac{q u}{r} + \frac{c q}{r} = y$.

Mais on peut abréger cette construction en menant tout de suite du point F la ligne FB perpendiculaire sur TA ; car il est évident que l'angle FAB est égal à APM , & que par conséquent dans le triangle rectangle ABF , on a $r : q :: c : AB = \frac{q c}{r}$; ainsi puisque QM est parallèle à AB , les y sont perpendiculaires sur BQ , & par conséquent BQ est la direction d'un des axes , dont l'autre par conséquent est parallèle à QM .

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or la seconde équation $u + \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{c h^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$, fait voir qu'il faut prendre , à l'opposite des u , la quantité $AG = \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2}$,

& tirer GC parallèle à PM ou perpendiculaire à BQ , qui déterminera le point C pour l'origine des x , & par conséquent pour le centre. En effet les x doivent être comptés sur CQ , puisque les y se comptent depuis cette ligne; or l'équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, ou $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, ou $GP = \frac{AG \times x}{n}$, fait voir que ces lignes x commencent en même temps que les lignes GP ; donc les lignes x doivent commencer au point C , & sont par conséquent CQ ; donc le point C est le centre.

On s'y prendra d'une manière semblable pour l'ellipse.

A l'égard de la parabole, puisqu'on a, dans ce cas, $rg = ph$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, l'équation que l'on a eue en y & u , après l'évanouissement du second terme par rapport à t , & après avoir introduit pour $r^2 - q^2$ la valeur p^2 , devient, en mettant dans la valeur de k^2 , au lieu de g , la valeur $\frac{ph}{r}$ tirée de $rg = ph$, devient, dis-je, $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} = 0$, ou $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$; pour la réduire à la forme ordinaire de l'équation à la parabole, on fera donc, conformément à ce qui a été dit (386), $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, ce qui donnera $yy = nx$; & ayant construit de la même manière que dans le cas précédent, l'équation $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, qu'on a eue pour l'évanouissement du second terme par rapport à t , on construira l'équation $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, d'une manière analogue à ce qui a été fait (386); c'est-à-dire, qu'ayant dégagé u , ce qui donne $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2}$,

dernière en $x + \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{c h^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$; je ne change point le signe du terme affecté de x , quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être prise arbitrairement positive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A parallèlement à PM la ligne $AB = \frac{c q}{r}$, & tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ , prendre arbitrairement sur le prolongement de cette ligne, la partie BK , & mener KL parallèle à PM , & telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$; alors si, par le point B & le point L , vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q , les lignes QM seront y . Car $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{c q}{r}$; or les triangles semblables BKL & BQI donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : QI$; c'est-à-dire, $r : q :: s : QI = \frac{q s}{r}$; donc $QM = t - \frac{q s}{r} + \frac{c q}{r} = y$.

Mais on peut abrégér cette construction en menant tout de suite du point F la ligne FB perpendiculaire sur TA ; car il est évident que l'angle FAB est égal à APM , & que par conséquent dans le triangle rectangle ABF , on a $r : q :: c : AB = \frac{q c}{r}$; ainsi puisque QM est parallèle à AB , les y sont perpendiculaires sur BQ , & par conséquent BQ est la direction d'un des axes, dont l'autre par conséquent est parallèle à OM .

DE MATHÉMATIQUES

& tirer GC parallèle à PM ou perpendiculaire. \dots
 déterminera le point C pour l'origine \dots
 quel pour le centre. En effet les \dots
 sur CQ , puisque les y se comptent \dots

l'équation $x + \frac{ch^2 p^2}{r^2 k^2} = \dots$
 $\frac{AG \times x}{r}$, ou $GP = \frac{AG \times x}{r}$

commencent en même temps \dots
 lignes x doivent commencer \dots
 quel CQ ; donc le point C \dots

On s'y prendra d'une manière \dots

A l'égard de la parabole. \dots
 $rg = ph$, ainsi qu'on \dots
 a en y & u , après \dots
 par rapport à t , & après \dots
 valeur p^2 , devient, \dots

lien de g , la valeur \dots

dis-je, $y^2 + \frac{c^2 p^2}{r} = \dots$
 $-\frac{c^2 p^2}{r}$; pour la réduire \dots

à la parabole, on fera \dots

dit (386), $\frac{2c^2 p^2}{r} = \frac{1}{n} = \dots$
 $= nx$; & ayant continué \dots

le cas précédent, l'équation \dots

a en pour l'évaluation \dots

à t , on continuera l'équation \dots

d'une manière analogue \dots

dire, qu'ayant déterminé \dots

$\frac{x}{n}$;
 $y^2 =$
 e, par le.



on prendra sur AP (fig. 61) la partie $AG = \frac{1}{2}c$, & tirant GC parallèle à PM , le point C sera l'origine des x qui seront CQ ; en sorte que CQ fera la direction du diamètre; le sommet de ce diamètre sera en C ; & son paramètre sera n , que l'on déterminera ainsi: puisque $AG = \frac{1}{2}c$, on a $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 n x}{2 c p^2} = \frac{r^2 n}{2 c p^2} \times CQ$; donc $n = \frac{2 c p^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; or les parallèles PQ , CG & AB donnent $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$; c'est-à-dire, $CQ : GP :: BF : c$; donc $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; mettant pour GP cette valeur dans celle de n , on aura $n = \frac{2 c^2 p^2}{r^2 \times BF}$ quantité connue, puisque c, p, r sont des quantités données, & que BF est connue par la construction. Mais on peut simplifier cette valeur, en remarquant que le triangle rectangle FAB donne $r : p :: AF : BF :: c : BF$; donc $BF = \frac{cp}{r}$; par conséquent $n = \frac{2 (BF)^2}{BF} = 2 BF$.

397. Qu'il soit question maintenant de trouver (fig. 62) la courbe que décrirait un point donné M de la ligne donnée OH ou de son prolongement, si l'on faisoit glisser les extrémités O & H le long des deux côtés CO, CH de l'angle donné OCH .

D'un point quelconque M de cette courbe menons MP parallèle à CH & MN perpendiculaire à CO ; nommons CP, u ; PM, t ; & puisque l'angle OCH ou son égal OPM est donné, son supplément MPN est donné aussi, nommons donc p le sinus & q le cosinus de ce dernier, en supposant que r marque le rayon; enfin nommons g & h les lignes données OM & MH .

Le triangle rectangle PNM nous donne $r : p :: t : MN$,

Si $r : q :: t : PN$; donc $MN = \frac{p^2}{r}$, & $PN = \frac{q^2}{r}$.
 Les parallèles CH & PM nous donnent $MH : CP :: MO : PO$; c'est-à-dire, $h : u :: g : PO = \frac{g^2}{h}$; donc
 $NO = \frac{q^2}{r} + \frac{g^2}{h}$; or le triangle rectangle MNO
 donne $(MN)^2 + (NO)^2 = (MO)^2$, c'est à-dire, $\frac{p^2 r^2}{r^2} + \frac{q^2 r^2}{r^2} + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2 u^2}{h^2} = gg$; donc puisque $p^2 + q^2 = r^2$, on aura simplement $t^2 + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2 u^2}{h^2} = gg$,
 équation à l'ellipse, ainsi qu'on peut le voir d'après ce qui
 a été dit (381).

Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{bb}{aa}$
 ($\frac{1}{4}aa - xx$) avec les conditions mentionnées (370), il
 faut d'abord faire disparaître le second terme par rapport
 à t . C'est pourquoi je fais $t + \frac{gqu}{rh} = y$; quarrant &
 substituant pour $t^2 + \frac{2gqut}{rh}$ la valeur que donnera cette
 opération, on aura $y^2 - \frac{ggquuu}{r^2 h^2} + \frac{g^2 u^2}{h^2} = gg$; mais
 les deux termes $-\frac{g^2 q^2 u^2}{r^2 h^2} + \frac{g^2 u^2}{h^2}$ ou $\frac{g^2 r^2 u^2 - g^2 q^2 u^2}{r^2 h^2}$
 se réduisent à $\frac{g^2 p^2 u^2}{r^2 h^2}$; parce que $r^2 - q^2 = p^2$, on a
 donc $y^2 + \frac{g^2 p^2 u^2}{r^2 h^2} = g^2$; or quoique dans cette équation
 il n'y ait pas de second terme par rapport à u , néanmoins
 (389) comme le terme ut s'est trouvé dans l'équation pri-
 mitive, je fais une transformation pour u , en faisant $u = \frac{lx}{n}$;
 & j'ai $y^2 + \frac{g^2 p^2 l^2 x^2}{r^2 h^2 n^2} = g^2$, & par conséquent, $y^2 =$
 $g^2 - \frac{g^2 p^2 l^2 x^2}{r^2 h^2 n^2}$ ou (divisant le second membre, par le

multiplicateur de x^2 , & indiquant en même temps la multiplication par ce même multiplicateur).

$y^2 = \frac{g^2 p^2 l^2}{r^2 h^2 n^2} \left(\frac{r^2 h^2 n^2}{p^2 l^2} - x^2 \right)$. Mais comme nous n'avons besoin que d'une seule indéterminée n , je suis le maître de supposer à l une valeur arbitraire ; pour rendre le calcul plus simple, je supposerai $l = r$, ce qui réduira l'équation à $y^2 = \frac{g^2 p^2}{h^2 n^2} \left(\frac{h^2 n^2}{p^2} - x^2 \right)$. Pour déterminer l'ellipse, j'en cherche d'abord les diamètres conjugués en comparant à l'équation $yy = \frac{b b}{a a} \left(\frac{1}{4} a a - x x \right)$: cette comparaison me donne $\frac{b b}{a a} = \frac{g^2 p^2}{h^2 n^2}$ & $\frac{1}{4} a a = \frac{h^2 n^2}{p^2}$, d'où l'on tire $a = \frac{2 h n}{p}$, & $b = 2 g$.

Voyons maintenant quelles en sont les directions & quelle est la valeur de n .

Les deux équations à construire sont donc ici, $z + \frac{g q u}{r h} = y$ & $u = \frac{l x}{n} = \frac{r x}{n}$. Pour la première, si l'on prend arbitrairement CK , & que l'on mène ensuite KL parallèle à PM , & telle que $CK : KL :: rh : gq$, alors les lignes QM comptées depuis la rencontre des lignes PM avec la ligne CL , seront y ; en effet, les triangles semblables CKL & CPQ donnent $CK : KL :: CP : PQ$, c'est-à-dire, $rh : gq :: u : PQ = \frac{g q u}{r h}$; donc $QM = PM + PQ = z + \frac{g q u}{r h} = y$.

Les lignes QM étant y , il faut maintenant que les x soient comptés sur CQ ; or l'équation $u = \frac{r x}{n}$ fait voir que les x commencent en même temps que les u ; donc le point C

est l'origine des x ; donc C est le centre, & CQ & CH sont les directions des deux diamètres conjugués. Quant à la valeur de n , l'équation $u = \frac{rx}{n}$, ou $CP = \frac{r \times CQ}{n}$, donne $n = \frac{r \times CQ}{CP}$; mais $CP : CQ :: CK : CL$; donc $\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK}$; donc $n = \frac{r \times CL}{CK}$; mais puisque CK est arbitraire, on peut le supposer $= r$, ce qui donne $n = CL$; on a donc tout ce qu'il faut pour construire l'ellipse (316).

Application des mêmes principes à quelques questions déterminées.

398. Après avoir résolu la seconde question indéterminée que nous nous sommes proposée (394), nous en avons fait usage (395) pour résoudre une question déterminée. Nous avons tacitement considéré cette dernière comme en renfermant deux autres, toutes deux indéterminées, & qui étant chacune de même espèce que la première, ont été résolues, chacune de la même manière. L'intersection des deux courbes ou cercles qui étoient le *lieu* de chacune de ces deux questions partielles, a donné la résolution de la question déterminée. Lorsque l'équation finale qui exprime les conditions d'une question passe le second degré, on s'y prend d'une manière semblable pour la résoudre. Dans les cas où l'on pourroit n'employer qu'une inconnue on en emploie deux, & l'on cherche à former par les conditions de la question, deux équations qui étant construites séparément, donnent chacune une courbe dont chaque point satisfait à l'équation qui lui appartient : si le problème est possible, les deux courbes se rencontrent en un ou plusieurs points, selon que la question est susceptible d'une ou de plusieurs solutions, selon qu'elle renferme plusieurs cas dépendans des mêmes

données & des mêmes raisonnemens. Ces intersections fournissent les différentes solutions de la question.

Tant que les deux équations à deux indéterminées, ne passeront pas le second degré, on voit donc que la résolution ne dépendra jamais que de l'intersection de deux sections coniques tout au plus. Au lieu que dans ces mêmes cas, si on n'employoit qu'une seule inconnue, ou si par le moyen des deux équations trouvées, on éliminoit ou chassoit une des deux inconnues, l'équation monteroit au troisième & plus souvent au quatrième degré. Mais si l'une des équations ou toutes les deux passent le second degré, alors la résolution dépend de l'intersection de courbes plus élevées que les sections coniques.

Voyons d'abord quelques exemples des questions qui ne passeroient pas le quatrième degré.

399. Proposons-nous pour première question de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données a & b .

Si je nomme t & u ces deux moyennes proportionnelles, j'aurai la progression $\therefore a : t : u : b$, qui me donne ces deux proportions $a : t :: t : u$ & $t : u :: u : b$, & par conséquent, ces deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$ qui toutes deux se rapportent directement à la parabole. C'est pourquoi si l'on tire (fig. 63) deux lignes indéfinies AZ , AX qui fassent entre elles un angle quelconque (pour plus de simplicité, on peut le supposer droit), & si sur l'une AZ comme diamètre & du point A comme sommet de ce diamètre, on construit (367) une parabole dont le paramètre du diamètre AZ soit a , & dont l'angle des coordonnées soit XAZ , cette parabole sera le lieu de l'équation $au = t^2$, enforte que les lignes AP étant u , les

lignes PM seront t . Pareillement si sur AX comme diamètre & du point A comme sommet, on construit une parabole dont le paramètre du diamètre AX soit b , & dont l'angle des coordonnées soit XAZ , cette parabole sera le lieu de l'équation $bt = u^2$, en sorte que les lignes AP' étant t , les lignes $P'M'$ seront u . Mais pour que la question soit résolue, il faut que les deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$ aient lieu en même temps ; c'est-à-dire, que la valeur de u dans l'une soit la même que la valeur de u dans l'autre, & qu'il en soit de même de t ; or c'est ce qui arrive évidemment au point M où se rencontrent les deux paraboles : car les u étant comptés sur AZ , & les t sur AX ou parallèlement à AX , il est visible que si l'on tire MP & $M'P'$ parallèles à AX & AZ , la valeur MP de u dans la parabole AMM' est la même que la valeur AP de u dans la parabole AMM ; pareillement la valeur AP de t dans la parabole AMM' est la même que la valeur PM de t dans la parabole AMM ; & il est visible qu'il n'y a qu'au point M où la valeur de u étant la même dans chacune, la valeur de t soit aussi la même dans chacune, si ce n'est cependant au point A où les deux courbes se rencontrent aussi ; mais comme u & t y sont zéro, il est évident que ce point ne satisfait pas à la question. Les valeurs de u & t sont donc AP & PM , le point M étant le point de rencontre.

400. Au reste, quoiqu'on puisse toujours parvenir à la solution en construisant séparément les équations que l'on trouve, quelquefois en préparant ces équations, on peut trouver des constructions plus simples ; par exemple, si l'on ajoute les deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$, on aura $au + bt = u^2 + t^2$; équation au cercle en supposant que les u & les t seront pris sur des lignes perpendiculaires

entre elles. Or quoique la parabole soit facile à construire, le cercle l'est encore davantage : ainsi dans le cas présent, je préférerois de construire d'abord l'équation $au = t^2$ seulement, comme ci-dessus ; après quoi je construirois l'équation au cercle $au + bt = u^2 + t^2$; en la changeant en cette autre $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, par l'évanouissement des seconds termes par rapport à t & à u , en faisant $t - \frac{1}{2}b = y$, & $u - \frac{1}{2}a = x$. Alors prenant $AB = \frac{1}{2}b$, & tirant BQ parallèle à AP , j'aurois les lignes QM pour les valeurs de y . Prenant ensuite $AO = \frac{1}{2}a$, & menant OC parallèle à AX , j'aurois les lignes CQ pour valeurs de x ; c'est pourquoi du point C comme centre, & du rayon $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$, c'est-à-dire, du rayon AC , je décrirois un cercle qui coupant la parabole AM au point M , me donneroit MP & AP pour les valeurs de t & de u .

401. On peut varier beaucoup ces constructions : on peut, par exemple, ajouter l'une des deux équations avec l'autre, multipliée par une quantité arbitraire $\frac{l}{n}$ positive ou négative, ce qui donne $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$, équation qui peut appartenir à l'ellipse ou à l'hyperbole selon la quantité qu'on prendra pour $\frac{l}{n}$, en sorte qu'on peut construire avec l'une ou l'autre de ces deux courbes, comme on vient de construire avec le cercle. On peut même construire avec l'une & avec l'autre, ou avec l'une seulement combinée avec un cercle, & cela en donnant à $\frac{l}{n}$, des valeurs convenables ; & qui sont faciles à déterminer d'après ce qui a été dit (392).

402. Proposons-nous pour seconde question de *diviser un angle ou un arc donné, en trois parties égales.*

Soit EO (fig. 64) l'arc qu'il s'agit de diviser ; A son centre ;

centre; imaginons que EM est le tiers de EO , & ayant tiré les rayons EA , MA , abaïssons les perpendiculaires MP , OR . Les lignes OR & AR qui sont le sinus & le cosinus de l'arc donné OE , sont censées continues; nous les nommerons d & c ; & nous nommerons r le rayon AE . Enfin nous nommerons u & t , les inconnues AP & PM .

Cela posé, le triangle rectangle APM donne $u^2 + t^2 = r^2$. Et les triangles semblables APM , ARS donnent $AP : PM :: AR : RS$; c'est-à-dire, $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Or si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en V , l'arc MV sera égal à l'arc MO , comme étant chacun double de ME ; donc l'angle $OMS = AMP = ASR$ (à cause des parallèles) $= OSM$. Donc le triangle SOM est isoscèle, & par conséquent $OS = OM = MV = 2t$; donc puisque $OR = OS + SR$, on aura $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $2tu + ct = du$, ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Les deux équations à construire sont donc $u^2 + t^2 = r^2$, ou $t^2 = r^2 - u^2$, & $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. La première est toute construite, puisque c'est l'équation même du cercle EMO .

Quant à la seconde, elle appartient à l'hyperbole (391); & comme les deux quarrés manquent, il faut, conformément à ce qui a été dit au même endroit cité, passer tous les termes affectés de u , dans un même membre, ce qui donne $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; faisant $\frac{1}{2}d - t = y$, & substituant pour t , sa valeur, on a $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, ou $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$. Je fais ensuite $u + \frac{1}{2}c = x$, & j'ai $xy = \frac{1}{4}cd$, équation à l'hyperbole entre les asymptotes, que l'on déterminera de la manière suivante.

L'équation $\frac{1}{2}d - t = y$, fait voir que si par le point A , origine des u & des t , on mène AB parallèle à PM , & égale à $\frac{1}{2}d$, & que l'on tire QBC parallèle à AP , les lignes QM comptées dans un sens opposé aux PM , seront y ; en effet $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; donc CQ est la direction d'une des asymptotes.

La seconde équation $u + \frac{1}{2}c = x$, fait voir que si l'on prolonge AP vers G de la quantité $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, les lignes GP ou leurs égales CQ (en tirant GC parallèle à PM) seront x ; donc C est le centre, & les lignes CQ & CG sont les asymptotes. On décrira donc par la méthode donnée (354) une hyperbole entre ces asymptotes, laquelle passe par le point A , ainsi que l'indique l'équation $xy = \frac{1}{4}cd = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$; cette hyperbole coupera le cercle au point cherché M .

Si l'arc EO étoit de plus de 90° , son cosinus AR tombant alors du côté opposé, seroit négatif; il faudroit dans les équations ci-dessus, supposer c négatif. Et si l'arc EO étoit de plus de 180° , & de moins de 270° , comme l'arc $EOE'O'$, son sinus & son cosinus seroient négatifs; il faudroit donc changer les signes de c & d , dans les mêmes équations ci-dessus.

Si l'on prolonge GC de la quantité $CG' = CG$; & CB de la quantité $CB' = CB$, & qu'ayant mené $E'A'$ & $G'A'$ parallèles à CG' & CB' , on décrive entre les lignes CG' & CB' (prolongées indéfiniment) comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A' , cette hyperbole rencontrera le cercle en deux points A' , M' , comme la première le rencontre aux deux points M & M'' . Or de ces quatre points, trois méritent d'être remarqués : savoir,

les points M , M' & M'' . Le premier donne l'arc EM pour le tiers de l'arc donné EO . Le second, M' , donne l'arc $E'M'$ pour le tiers de $E'O$, supplément de EO . Enfin le troisième, M'' , donne $E'M''$ pour le tiers de $EOE'O'$, c'est-à-dire de l'arc OE augmenté de la demi-circonférence.

En effet, l'arc $E'O$ a pour sinus & cosinus, les lignes RO & AR , ainsi que l'arc EO , avec cette seule différence que AR considéré comme cosinus de l'arc $E'O$ plus grand que 90° , est négatif; donc pour avoir la solution dans ce second cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer, dans la solution ci-dessus, que c est négatif; or ce changement n'affecte que la seconde équation, & change sa réduite $xy = \frac{1}{4}cd$, en $xy = -\frac{1}{4}cd$, équation qui appartient à l'hyperbole $A'M'$, & qui fait donc voir que la solution de ce cas sera fournie par l'intersection M' de cette branche d'hyperbole avec le cercle. (Nous verrons dans un moment, pourquoi ce n'est pas le point A'). $P'M'$ est donc le sinus de l'arc cherché, dans ce second cas. Cet arc est donc $E'M'$; c'est-à-dire, que $E'M'$ est le tiers de $E'O$.

A l'égard de la troisième solution, si l'on augmente l'arc EO de 180° , ce qui se fera en prenant $E'O' = EO$, alors l'arc $EOE'O'$ a pour sinus & cosinus les lignes $R'O'$, AR' , qui sont nécessairement égales aux lignes RO & AR , avec cette différence seulement, que tombant toutes deux de côtés opposés à ces dernières, elles sont négatives; donc pour avoir la solution qui convient à ce cas, il n'y a autre chose à faire que de supposer c & d négatifs. Or ce changement n'en produit aucun dans l'équation, où entrent c & d , c'est-à-dire, dans l'équation $xy = \frac{1}{4}cd$; donc la première hyperbole doit donner, par son intersection M'' , la solution de ce troisième cas; donc $P''M''$ est le sinus de

l'arc cherché dans ce troisième cas; cet arc est donc $E'M''$; c'est-à-dire, que $E'M''$ est le tiers de $EOE'O'$.

Ainsi la même construction qui sert à trouver le tiers d'un arc donné A , sert aussi à trouver le tiers de $180^\circ - A$, & le tiers de $180^\circ + A$.

On peut appliquer ici ce que nous avons dit (400) sur les différentes sections coniques qu'on peut employer pour construire, en combinant à volonté les deux équations en u & t .

A l'égard de la quatrième intersection, nous avons dit qu'elle se faisoit au point A' , ce qui est évident, puisque l'hyperbole est assujettie à passer par le point A' , qui est déterminé en faisant $B'A' = AB$, & $B'C = CB$, ce qui fait voir que $AR' = AR$ & $R'A' = RO$; donc le point A' appartient à la circonférence. Mais il ne donne point une nouvelle solution; puisqu'il est connu, & déterminé par des opérations indépendantes des équations qui ont donné la solution.

403. Si de l'équation $2tu + ct = du$, trouvée ci-dessus, on tire la valeur de t , pour la substituer dans l'équation $u^2 + t^2 = r^2$, qu'on a eue en même temps, on aura, après avoir mis pour $c^2 + d^2$, sa valeur r^2 , transposé & réduit, $4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, ou $4u^3(u + c) - 3r^2u(u + c) - cr^2 \times (u + c) = 0$, qui étant divisé par $u + c$, donne $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, équation qui doit renfermer les trois cas que nous venons d'examiner: elle doit donc avoir trois racines; or la construction fait voir que u a en effet trois valeurs; savoir, AP , AP' & AP'' ; & ces deux dernières tombant de côtés opposés à la première, on voit que cette équation a trois racines ou valeurs de u , dont deux sont négatives; savoir

$x = -AP'$, $u = -AP''$, & la troisième positive, savoir $u = AP$.

404. L'équation $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, ou $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, est dans le cas irréductible; & ses racines étant les cosinus de $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$, $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$, on peut donc, par le moyen des tables des sinus, trouver les trois racines d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible, par une approximation suffisante & prompte: en voici la méthode. Représentons toute équation du troisième degré dans le cas irréductible, par l'équation $u^3 - pu + q = 0$; en comparant à l'équation $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, nous aurons, $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, & $-\frac{cr^2}{4} = q$; de la première de ces deux dernières équations, on tire $r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$; & de la seconde, $c = -\frac{3q}{p}$. Représentons par R le rayon des tables; alors nous aurons le cosinus de l'arc EO , tel qu'il est dans les tables, si nous calculons le quatrième terme de cette proportion $r : c$ ou $\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R :$ à un quatrième terme; ce quatrième terme, savoir $\frac{3qR}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$, étant cherché dans les tables, donnera le sinus du complément de l'arc EO : c'est pourquoi ajoutant 90° au nombre de degrés que l'on trouvera, ou au contraire retranchant ce nombre, de 90° , selon que q sera positif ou négatif dans l'équation, on aura l'arc EO , que je représente par A ; on cherchera donc dans les mêmes tables, les cosinus des trois arcs $\frac{A}{3}$, $\frac{180^\circ - A}{3}$, & $\frac{180^\circ + A}{3}$; & pour les réduire au rayon r , on multipliera chacun par $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire, par $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$, puisque pour y réduire par exemple $\cos. \frac{A}{3}$ pris dans les tables;

il faut faire cette proportion $R : \cos. \frac{A}{3} :: r :$ est le cosinus du même arc dans le cercle qui a pour rayon r , c'est-à-dire, est à AP ou u ; les trois valeurs de u seront donc $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}P}}{R} \cos. \frac{A}{3}$, $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}P}}{R} \cos. \frac{180^\circ - A}{3}$, & $u' = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}P}}{R} \cos. \frac{180^\circ + A}{3}$, dans lesquelles il faudra observer de donner le signe — à celles dont l'arc passera 90° . On peut faciliter ces opérations par le moyen des logarithmes.

405. Proposons-nous maintenant cette question plus générale que celle que nous avons résolue (274). D'un point D (fig. 65) donné de position à l'égard des deux lignes AR , AP qui font entre elles un angle connu, mener la ligne DP de manière que sa partie interceptée RP soit égale à une ligne donnée.

Du point D menons la ligne DS perpendiculaire à AP prolongée, & la ligne DO parallèle à AR ; menons aussi du point R la ligne RN perpendiculaire à AP . Les lignes DO , DS , OS & AO sont censées connues, tant à cause que la position du point D est supposée connue, que parce que l'angle RAP ou son supplément RAN égal à DOS est supposé connu; c'est pourquoi nous nommerons DO , r ; DS , p ; OS , q ; AO , d , & la ligne à laquelle RP doit être égale, c . Enfin nous nommerons u & t , les inconnues AP & AR .

Cela posé, les triangles semblables DSO , RNA donneront $DO : DS :: AR : RN$, & $DO : OS :: AR : AN$; c'est-à-dire, $r : p :: t : RN = \frac{p^c}{r}$, & $r : q :: t : AN = \frac{q^c}{r}$; par conséquent, $NP = \frac{q^c}{r} + u$;

Or le triangle rectangle RNP , donne $\overline{RN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{RP}^2$;
c'est-à-dire, $\frac{qqtt}{rr} + \frac{2qu}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, ou
(à cause que $p^2 + q^2 = r^2$, dans le triangle rectangle
 DSO) $t^2 + \frac{2qu}{r} + u^2 = cc$.

Mais comme nous avons deux inconnues, il nous faut
deux équations: or les triangles semblables DOP , RAP
donnent $DO : RA :: OP : AP$; c'est-à-dire, $r : t :: d$
 $+ u : u$, & par conséquent, $ru = td + ut$. Ce sont là
les deux équations qu'il faut construire pour résoudre la ques-
tion. La première (381) appartient à l'ellipse, & la seconde
à l'hyperbole.

Pour construire la première, je fais $t + \frac{qu}{r} = y$; en
opérant comme dans les exemples semblables ci-dessus, j'au-
rai, $yy - \frac{qquu}{rr} + uu = cc$, ou [à cause que $-\frac{qquu}{rr} + uu = \left(\frac{rr - qq}{rr}\right)uu = \frac{ppuu}{rr}$] $yy +$
 $\frac{ppuu}{rr} = cc$. Je fais $u = \frac{l}{n} x$ (389); & j'ai $yy +$
 $\frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, ou (parce que je puis supposer arbitrai-
rement une valeur à l'une des deux indéterminées l & n),
faisant $l = r$, $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn} \left(\frac{ccnn}{pp} - xx\right)$.
Comparant à l'équation $yy = \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, on
trouvera que les deux diamètres conjugués a & b sont
 $a = \frac{2cn}{p}$, & $b = 2c$. Déterminons leur position & la
valeur de n ; mais pour mieux sentir l'usage de cette cons-
truction, concevons auparavant, que donnant successive-
ment à u ou AP plusieurs valeurs, on mène parallèlement.

à AR , les lignes PM égales aux valeurs correspondantes de t , ce qui produira la courbe dont l'équation nous occupe actuellement. Cela posé, ayant pris arbitrairement AK sur AP , & mené KL parallèle à PM , & qui soit à $AK ::$

$q : r$, on aura $QM = PM + PQ = t + \frac{q^2}{r}$, à cause

des triangles semblables AKL & APQ ; donc $QM = y$;

AQ est donc la direction d'un des diamètres, & les x doi-

vent être comptés sur ce diamètre; or l'équation $u = \frac{l}{x}$

$x = \frac{r}{n} x$, fait voir que les x commencent en même temps

que les u , donc les x sont AQ . Cela étant, l'équation

$u = \frac{rx}{n}$, devient donc $AP = \frac{r \times AQ}{n}$ qui donne

$n = \frac{r \times AQ}{AP}$ ou $AP : AQ :: r : n$; c'est-à-dire, AK

: $AL :: r : n$; or comme AK est arbitraire, on peut le supposer $= r$, & l'on aura, par conséquent, $n = AL$.

Il ne s'agit donc plus que de construire (316) une ellipse dont les diamètres conjugués fassent entre eux un angle égal à AQM , & dont celui qui a AQ pour direction, soit $= \frac{2cn}{p}$, & l'autre qui a AR pour direction, soit $= 2c$.

Cette ellipse sera le lieu de la première équation. Mais on peut remarquer en passant, que cette ellipse est précisément celle que décrirait le milieu d'une ligne égale à $2RP$, glissant le long des côtés AP , AR ; c'est ce dont il est aisé de se convaincre, en comparant avec la solution donnée (397) & y supposant $g = h = c$. Quand l'angle RAP est droit, l'ellipse devient un cercle dont le rayon est c .

Il ne reste plus qu'à construire la seconde équation $ru = dt + ut$ ou $ru - ut = dt$. Or selon les principes précédens, je fais $r - t = y'$, & ensuite $u + d = x'$, ce qui

change cette équation en $x'y' = rd$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. On prendra donc , en vertu de l'équation $r - t = y'$, sur AR la quantité $AT = r = OD$, c'est-à-dire , que par le point D on tirera DTV parallèle à AP ; alors les lignes VM seront y' en les comptant de V vers M , c'est-à-dire , dans un sens opposé à PM ; car $VM = PV - PM = r - t$, donc $VM = y'$. Ensuite , en vertu de l'équation $u + d = x'$, on prendra $OA = d$, c'est-à-dire , qu'on mènera par le point D la ligne DO parallèle à AT ; alors les lignes DV seront x' , puisque $DV = OP = OA + AP = d + u$. On construira donc (354) entre les lignes DO & DV comme asymptotes , une hyperbole qui passe par le point A , puisqu'on a $x'y' = rd = AO \times AT$; cette hyperbole rencontrera l'ellipse aux deux points M & M' , par lesquels menant MR & $M'R'$ parallèles à AP , on aura deux points R & R' par lesquels & par le point D tirant DRP & $DP'R'$, les parties PR & $P'R'$ interceptées dans les angles égaux RAP , $R'AP'$ seront égales à la ligne c .

Si en prolongeant les asymptotes , on décrit l'hyperbole opposée (fig. 66) $M''A'M'''$, dans le cas où elle rencontrera l'ellipse , elle déterminera deux nouveaux points $M''M'''$ par lesquels menant des parallèles à AP , on aura sur AT deux nouveaux points R'' , R''' , par lesquels & par le point D tirant deux lignes , les parties comprises dans l'angle TAS seront aussi égales à la ligne donnée c . Telle est en général la manière dont on doit s'y prendre pour résoudre les questions déterminées , qui n'excéderont pas le quatrième degré.

406. Si l'on avoit résolu la question sans employer deux inconnues , on pourroit néanmoins faire usage de la même

méthode, en introduisant une nouvelle inconnue. Par exemple, si l'on proposoit de trouver un cube qui soit à un cube connu a^3 , dans un rapport donné, marqué par le rapport de m à n . En nommant u le côté de ce cube, on auroit $u^3 : a^3 :: m : n$, & par conséquent $nu^3 = ma^3$.

Pour construire cette équation, je supposerois $u^2 = at$; alors l'équation se changeroit en $natu = ma^3$, ou $tu = \frac{ma^3}{n}$. Je construirois donc la parabole qui a pour équation $u^2 = at$, & l'hyperbole qui a pour équation $tu = \frac{ma^3}{n}$. L'intersection de ces deux courbes, me donneroit les valeurs de n & t .

Si l'on multiplie par n , l'équation $tu = \frac{ma^3}{n}$, & qu'on y substitue de nouveau, pour u^2 sa valeur at , on aura $at^2 = \frac{ma^3n}{n}$, ou $t^2 = \frac{ma^3}{n}u$, autre équation à la parabole, que l'on peut construire conjointement avec l'équation $u^2 = at$. On peut remarquer, en passant, que ces équations sont les mêmes qu'on auroit en cherchant deux moyennes proportionnelles entre a & $\frac{ma^3}{n}$; ainsi on peut construire précisément de la même manière qu'on l'a fait (399).

407. L'équation $nu^3 = ma^3$, donne $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$; on voit donc que la construction des radicaux cubes se fait par le moyen des sections coniques. Il en est de même des radicaux quatrièmes, lorsqu'ils renferment des radicaux cubes comme $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt[3]{ab^2})}$; car s'ils ne renfermoient que des radicaux quarrés comme $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt{ab})}$, ou des quantités

rationnelles , leur construction se ramèneroit toujours au cercle ; en effet , en prenant une moyenne proportionnelle m entre a & b , on auroit $\sqrt[4]{a^3 m}$; prenant une moyenne proportionnelle n entre a & m , on auroit $\sqrt[4]{a^2 n^2}$ ou \sqrt{an} , qui exprime une moyenne proportionnelle entre a & n .

408. Quand l'équation déterminée auroit un plus grand nombre de termes , on la construiroit toujours d'une manière analogue ; par exemple , si l'on avoit $u^4 + au^3 + aqu^2 + q^2 ru + sa^3 = 0$, a, q, r, s étant des quantités connues ; en supposant $u^2 = at$, on auroit $a^2 t^2 + a^2 ut + aqu^2 + a^2 ru + sa^3 = 0$, ou $at^2 + aut + qu^2 + aru + sa^2 = 0$, équation qui appartient à une section conique ; construisant donc cette équation , & l'équation $u^2 = at$, selon les principes donnés ci - devant , les intersections des deux courbes donneront les différentes valeurs de u .

409. Mais en introduisant ainsi , arbitrairement , une nouvelle équation , il peut arriver , que les deux courbes ne se rencontrent point , quoique la question qui aura donné l'équation , ait une ou plusieurs solutions ; c'est pourquoi , pour éviter tout embarras , nous allons exposer un procédé qui a lieu également pour tous les degrés.

Supposons , par exemple , que l'équation soit $u^3 - qu^2 + pau - qa^2 = 0$; on supposera $u^3 - qu^2 + pau - qa^2 = a^3 t$, t marquant une indéterminée , & a, p, q , des nombres ou des lignes connues ; alors si l'on conçoit qu'on donne à u successivement plusieurs valeurs $AP, AP, \&c.$ (fig. 67) , & que l'on porte (*) les valeurs correspondantes de t (qui seront faciles à avoir , puisque t ne monte qu'au

(*) En observant de porter | celles qui se trouveront avoir
des côtés opposés de l'axe AP , | des signes contraires.

premier degré) en PM, PM , sous un angle quelconque, que pour plus de simplicité on peut supposer droit, il en naîtra une courbe. Or pour savoir où cette courbe rencontre l'axe AP , il faut supposer $t = 0$, ce qui donne $u^3 - au^2 + pau - q = 0$, c'est-à-dire, l'équation proposée; donc les distances AO, AO', AO'' auxquelles la courbe rencontre l'axe, seront les différentes valeurs de u .

Mais si au lieu de calcul, on veut une construction, cela sera fort aisé en donnant à l'équation, cette forme, $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$; or la construction de chacun des termes $\frac{u^3}{a^2}, \frac{u^2}{a}, \frac{pu}{a}$, pour chaque valeur de u donnée en lignes, est facile & s'exécute par ce qui a été dit (246).

410. Quand il entrera plus d'une inconnue dans la question, on pourra ramener la construction à celle que nous venons de donner, en réduisant toutes les inconnues à une seule, par la méthode donnée (162 & suiv.)

411. Si la question est indéterminée, & que l'une des deux indéterminées qui entreront dans l'équation, ne passe pas le second degré, on pourra toujours construire l'équation, à quelque degré que monte l'autre indéterminée, en donnant à cette autre indéterminée des valeurs arbitraires, & calculant les valeurs correspondantes de la première; faisant de celles-là les abscisses, & de celles-ci les ordonnées d'une courbe. Mais si les deux indéterminées passent toutes deux le second degré, alors il faudra pour chaque valeur que l'on donnera à une des indéterminées, trouver les valeurs de l'autre, par la méthode qu'on vient de donner. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les

constructions de cette dernière espèce qu'on rencontre d'ailleurs assez rarement.

412. Avant de terminer cette troisième Partie, nous ferons encore remarquer quelques usages de l'application des équations aux courbes. Puisque toute équation à une section conique est toujours du second degré, & que l'équation la plus générale de ce degré peut toujours être réduite à cette forme $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, il s'ensuit qu'on peut toujours faire passer une section conique par cinq points donnés, pourvu que ces points, pris trois à trois, ne soient pas en ligne droite, parce qu'une section conique ne peut rencontrer une ligne droite en plus de deux points.

En effet, concevons que A, B, C, D, E (fig. 68) soient cinq points donnés & qui aient cette condition : si l'on rapporte ces cinq points à la ligne AD qui joint deux d'entre eux, en menant les lignes BF, CH, EG sous un angle donné, ou perpendiculaires à AD , alors les distances $AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD$, qui sont censées connues, peuvent être regardées comme les abscisses & les ordonnées d'une ligne courbe. Or je dis qu'on peut toujours supposer que cette ligne courbe a pour équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; en effet, si l'on nomme $AF, m; BF, n; AG, m'; GE, n'; AH, m''; CH, n''$, & AD, m''' ; il est visible que 1°. pour le point A on aura $u = 0$, & $t = 0$, ce qui réduit l'équation à $h = 0$. 2°. Pour le point B on aura $u = m$ & $t = n$; ce qui change l'équation en $dm^2 + cmn + en^2 + fm + gn = 0$, (à cause que $h = 0$). 3°. Pour le point E , on aura $u = m'$, $t = n'$, & par conséquent, $dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$. 4°. Pour le point C , on trouvera de même $dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$. 5°. Enfin pour le point D ou $t = 0$ & $u = m'''$,

on aura $em''' + fm''' = 0$, ou simplement $em''' + f = 0$. Or ces quatre équations renfermant toutes les quantités c, e, f, g , au premier degré, il sera facile, par les méthodes de la première section, d'en avoir les valeurs; alors en les substituant dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, ou plutôt dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu = 0$, (puisque $h = 0$), on aura c, e, f, g en quantités toutes connues, & l'équation se divisera par d . Il sera donc alors facile de construire la courbe, & de déterminer si elle est ellipse, hyperbole, parabole, ou cercle. Si l'on ne donnoit que quatre points, alors un des coefficients seroit arbitraire; ce qui donne lieu d'imposer arbitrairement une condition, & deux si l'on ne donne que trois points, & ainsi de suite.

On distingue les lignes par le degré de leur équation. Ainsi la ligne droite, dont l'équation n'est que du premier degré, est ligne du premier ordre. Les sections coniques sont les lignes du second ordre.

On voit donc qu'on peut, par la même méthode, déterminer l'équation d'une ligne du troisième ordre, qu'on assujétiroit à passer par autant de points moins un que l'équation générale de cet ordre, à deux indéterminées, peut avoir de termes différens : il en est de même dans les ordres supérieurs.

413. Cette même méthode peut servir à lier par une loi approchée & simple, plusieurs quantités connues, dont la loi seroit ou trop composée ou inconnue. Supposons, par exemple, que l'on connoisse trois quantités que je représente par les lignes CB, ED, GF (fig. 69) & que ces quantités dépendent de trois autres AB, AD, AF . Il s'agit de trouver une quantité HL intermédiaire aux premières,

ou qui en soit voisine, & qui dérive de AH de la même manière que CB , ED , &c. dérivent de AB , AD , &c.

On peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, en prenant une équation à deux indéterminées u & t qui ait au moins autant de termes différens qu'il y a de quantités telles que CB , ED , GF . Mais entre tous ces différens moyens celui qui donne plus de facilité, pour les différens usages qu'on peut faire de cette méthode, est de regarder la ligne IH comme l'ordonnée, & la ligne AH comme l'abscisse d'une courbe qui passeroit par les points donnés C , E , G , &c., & qui auroit pour équation celle-ci, $t = a + bu + cu^2 + \&c.$ en prenant autant de termes que l'on a de quantités ou de points C , E , G ; alors supposant, comme ci-dessus, que u valant AB , t vaut CB ; que u valant AD , t vaut DE ; que u valant AF , t vaut GF , & ainsi de suite, on aura autant d'équations pour déterminer a , b , c , &c. qu'on a de points. Ayant déterminé les valeurs de a , b , c , &c., si on les substitue dans l'équation $t = a + bu + cu^2$, &c. on aura une équation dans laquelle tout sera connu, excepté u & t . Si donc on met pour u , la distance connue AH qui convient à la quantité HI que l'on cherche, alors on aura la valeur correspondante de t , c'est-à-dire, HL .

On voit par-là la confirmation de ce que nous avons dit (282). En effet, si l'on vouloit imiter le contour $ABCDEF$ (fig. 70); on abaisseroit d'un certain nombre de points de ce contour, des perpendiculaires sur une ligne déterminée XZ ; puis par la méthode qu'on vient de voir, on détermineroit l'équation d'une courbe qui passeroit par tous ces points, & dans laquelle t étant au premier degré, u montât à un degré marqué par le nombre de ces points

moins un ; alors cette équation serviroit à déterminer des perpendiculaires intermédiaires qui approcheroient d'autant plus des véritables, qu'on aura pris d'abord un plus grand nombre de points A, B, C, D , &c.

Appendice.

414. Nous nous étions proposé de faire entrer dans ce volume plusieurs autres objets ; mais pour ne point passer de justes bornes, nous sommes obligés de les renvoyer au suivant. Cependant, nous placerons encore ici quelques propositions dont nous aurons occasion de faire usage par la suite, & dont quelques-unes nous serviront à démontrer la règle que nous avons donnée (*Géom.* 361. *Quest.* VI) pour trouver les angles d'un triangle sphérique lorsqu'on en connoît les trois côtés.

415. Rappelons-nous (*Géom.* 284, 285 & 278) que si a & b représentent deux angles ou deux arcs, on a $\sin. (a + b) = \frac{\sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a}{r}$, & $\cos. (a + b) = \frac{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}{r}$, ou (en supposant pour plus de simplicité que $r = 1$)

$$1^{\circ}. \sin. (a + b) = \sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a.$$

$$2^{\circ}. \cos. (a + b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b.$$

$$3^{\circ}. \sin. (a - b) = \sin. a \cos. b - \sin. b \cos. a.$$

$$4^{\circ}. \cos. (a - b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b.$$

$$5^{\circ}. \text{tang.}$$

5°. $\text{tang. } a = \frac{r \text{ fin. } a}{\text{cof. } a} = \frac{\text{fin. } a}{\text{cof. } a}$ en supposant toujours le rayon $= 1$, comme nous le ferons dorénavant.

$$6°. \text{cot. } a = \frac{\text{cof. } a}{\text{fin. } a}.$$

416. Cela posé, si l'on divise la valeur de $\text{fin. } (a + b)$ par celle de $\text{cof. } (a + b)$, on aura $\frac{\text{fin. } (a + b)}{\text{cof. } (a + b)}$, c'est-à-dire, $\text{tang. } (a + b)$

$$= \frac{\text{fin. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } b \text{ cof. } a}{\text{cof. } a \text{ cof. } b - \text{fin. } a \text{ fin. } b} = \frac{\frac{\text{fin. } a}{\text{cof. } a} + \frac{\text{fin. } b}{\text{cof. } b}}{1 - \frac{\text{fin. } a \text{ fin. } b}{\text{cof. } a \text{ cof. } b}} \text{ (en divisant}$$

le second membre, haut & bas, par $\text{cof. } a \text{ cof. } b$);

$$\text{donc } \text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}.$$

Si au contraire on divise la valeur de $\text{cof. } (a + b)$ par celle de $\text{fin. } (a + b)$, on aura $\frac{\text{cof. } (a + b)}{\text{fin. } (a + b)}$ ou

$$\text{cot. } (a + b) = \frac{\text{cof. } a \text{ cof. } b - \text{fin. } a \text{ fin. } b}{\text{fin. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } b \text{ cof. } a}, \text{ ou en}$$

divisant haut & bas par $\text{fin. } a \text{ cof. } b \dots\dots\dots$

$$\text{cot. } (a + b) = \frac{\frac{\text{cof. } a}{\text{fin. } a} - \frac{\text{fin. } b}{\text{cof. } b}}{1 + \frac{\text{fin. } b \text{ cof. } a}{\text{fin. } a \text{ cof. } b}} = \frac{\text{cot. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{cot. } a \text{ tang. } b}.$$

Si l'on divise de même la valeur de $\text{fin. } (a - b)$ par celle de $\text{cof. } (a - b)$, & celle de $\text{cof. } (a - b)$ par celle de $\text{fin. } (a - b)$, on aura, en opérant de même,

$$\text{tang. } (a - b) = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a \text{ tang. } b}, \text{ \& cot. } (a - b)$$

$$= \frac{\text{cot. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{cot. } a \text{ tang. } b}.$$

417. Les valeurs de $\sin. (a + b)$ $\cos. (a + b)$, $\tan. (a + b)$ que nous venons d'exposer, peuvent servir à trouver facilement les sinus, cosinus & tangentes des arcs multiples d'un arc donné, & par conséquent les équations qui serviroient à diviser un angle en plusieurs parties égales. Il n'y a qu'à supposer successivement $b = a$, $= 2a$, $= 3a$; & ainsi de suite.

Par exemple, en supposant $b = a$, on aura $\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a$, & $\cos. 2a = \cos. a \cos. a - \sin. a \sin. a = \cos.^2 a - \sin.^2 a = 1 - 2 \sin.^2 a$, (en mettant pour $\cos.^2 a$ sa valeur $1 - \sin.^2 a$). En supposant $b = 2a$, on aura $\sin. 3a = \sin. a \cos. 2a + \sin. 2a \cos. a$, & $\cos. 3a = \cos. 2a \cos. a - \sin. 2a \sin. a$. Or les deux équations précédentes donnent les valeurs de $\sin. 2a$ & de $\cos. 2a$; si donc on les substitue dans celles-ci, on aura les valeurs de $\sin. 3a$ & $\cos. 3a$ exprimées par les sinus & cosinus de l'arc simple a . On trouvera de même celles de $\sin. 4a$ & $\cos. 4a$; $\sin. 5a$ & $\cos. 5a$, & ainsi de suite. On s'y prendra de même pour avoir $\tan. 2a$, $\tan. 3a$, &c., en employant la formule qui donne $\tan. (a + b)$, & supposant successivement $b = a$, $= 2a = \&c.$

418. Si l'on ajoute ensemble la valeur de $\sin. (a + b)$ & celle de $\sin. (a - b)$, on aura $\sin. (a + b) + \sin.$

$(a - b) = 2 \sin. a \cos. b$, & par conséquent $\sin. a \cos. b = \frac{1}{2} \sin. (a + b) + \frac{1}{2} \sin. (a - b)$. En ajoutant pareillement la valeur de $\cos. (a + b)$ avec celle de $\cos. (a - b)$, on trouvera $2 \cos. a \cos. b = \cos. (a + b) + \cos. (a - b)$, ou $\cos. a \cos. b = \frac{1}{2} \cos. (a + b) + \frac{1}{2} \cos. (a - b)$. Au contraire en retranchant la valeur de $\cos. (a + b)$ de celle de $\cos. (a - b)$ on trouvera $2 \sin. a \sin. b = \cos. (a - b) - \cos. (a + b)$, & par conséquent $\sin. a \sin. b = \frac{1}{2} \cos. (a - b) - \frac{1}{2} \cos. (a + b)$.

419. Si l'on fait $a + b = m$ & $a - b = n$, on aura, en ajoutant & retranchant, & divisant ensuite par 2, $a = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n$, & $b = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n$, d'où l'on conclura facilement des dernières formules qu'on vient de trouver :

- 1°. $\sin. m + \sin. n = 2 \sin. (\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n) \times \cos. (\frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n)$.
- 2°. $\cos. m + \cos. n = 2 \cos. (\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n) \times (\cos. \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n)$.
- 3°. $\cos. n - \cos. m = 2 \sin. (\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n) \times (\sin. \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n)$.

Toutes ces propositions nous feront très-utiles; on voit avec quelle facilité elles se trouvent & se démontrent par le calcul. Nous nous bornerons, pour le présent, à en faire voir l'usage pour la démonstration de la règle donnée (*Géom.* 361. *Quest.* VI.).

420. Soit donc ABC (*fig.* 71) un triangle sphérique, AD un arc de grand cercle, abaissé de

l'angle A perpendiculairement sur le côté opposé BC : prenons sur ce même côté $BE = BA$, & ayant imaginé l'arc de grand cercle AE , par son milieu O & par le point B , imaginons aussi l'arc de grand cercle BO , qui divisera l'angle ABC en deux parties égales.

Cela posé, dans le triangle EBO , on aura (*Géométrie* 349) en supposant le rayon $= 1$,
 $1 : \sin. BE$ ou $\sin. AB :: \sin. OBE$ ou $\sin. \frac{1}{2} ABC$
 $: \sin. OE$; donc $\sin. OE$ ou $\sin. \frac{1}{2} AE = \sin. AB$
 $\times \sin. \frac{1}{2} ABC$; ou , en quarrant, $\sin.^2 \frac{1}{2} AE =$
 $\sin.^2 AB \times \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$; or nous venons de
voir (417) que $\cos. 2a = 1 - 2 \sin.^2 a$, ou,
en faisant $2a = m$, $\cos. m = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} m$;
donc $\sin.^2 \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. m$, & par conséquent on
peut , au lieu de $\sin.^2 \frac{1}{2} AE$, mettre $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. AE$;
on aura donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. AE = \sin.^2 AB \times$
 $\sin.^2 \frac{1}{2} ABC$; or (*Géométrie* 357) on a , dans
le triangle ABC , $\cos. BD : \cos. CD$ ou
 $\cos. (BC - BD) :: \cos. AB : \cos. AC$;
c'est-à-dire, $\cos. BD : \cos. BC \cos. BD +$
 $\sin. BC \sin. BD :: \cos. AB : \cos. AC$; & par
conséquent $\cos. BD \cos. AC = \cos. AB \cos. BC$
 $\cos. BD + \cos. AB \sin. BC \sin. BD$, d'où l'on
tire $\sin. BD = \frac{\cos. BD \cos. AC - \cos. AB \cos. BC \cos. BD}{\cos. AB \sin. BC}$.

Par le même principe, on aura dans le triangle

BAE , $\cos. BD : \cos. DE$ ou $\cos. (AB - BD)$
 $:: \cos. AB : \cos. AE$; c'est-à-dire, $\cos. BD :$
 $\cos. AB \cos. BD + \sin. AB \sin. BD :: \cos. AB :$
 $\cos. AE$; donc $\cos. BD \cos. AE = \cos. AB$
 $\cos. AB \cos. BD + \cos. AB \sin. AB \sin. BD$, d'où

$$\text{l'on tire } \sin. BD = \frac{\cos. BD \cos. AE - \cos.^2 AB \cos. BD}{\cos. AB \sin. AB};$$

égalant ces deux valeurs de $\sin. BD$, & sup-
 primant ensuite le facteur commun $\frac{\cos. BD}{\cos. AB}$ on

$$\text{aura, après les opérations ordinaires, } \cos. AE = \frac{\sin. AB \cos. AC - \cos. AB \sin. AB \cos. BC + \cos.^2 AB \sin. BC}{\sin. BC};$$

substituant cette valeur dans l'équation $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos.$
 $AE = \sin.^2 AB \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$, on aura $\frac{1}{2} -$

$$\frac{\sin. AB \cos. AC + \cos. AB \sin. AB \cos. BC - \cos.^2 AB \sin. BC}{2 \sin. BC}$$

$= \sin.^2 AB \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$; chassant les dénomina-
 teurs, & mettant ensuite dans $\sin. BC - \cos.^2 AB$
 $\sin. BC$ ou $\sin. BC (1 - \cos.^2 AB)$, au lieu
 de $1 - \cos.^2 AB$, la valeur $\sin.^2 AB$, & divisant
 ensuite par $\sin. AB$, on aura $\sin. BC \sin. AB$
 $- \cos. AC + \cos. AB \cos. BC = 2 \sin. AB$
 $\times \sin. BC \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$; or (415) $\cos. AB \cos. BC$
 $+ \sin. BC \sin. AB = \cos. (BC - AB)$; donc
 $\cos. (BC - AB) - \cos. AC = 2 \sin. AB \sin. BC$
 $\sin.^2 \frac{1}{2} ABC$; mais (419) $\cos. (BC - AB)$
 $- \cos. AC = 2 \sin. (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CB - \frac{1}{2} AB)$
 $\sin. (\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB)$ qui est la même chose que

486 COURS DE MATHÉMATIQUES.

$2 \sin. (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - AB) \sin. (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - BC)$
 ou (en nommant S la somme des trois côtés), la même
 chose que $2 \sin. (\frac{1}{2} S - AB) \times \sin. (\frac{1}{2} S - BC)$;
 donc $2 \sin. (\frac{1}{2} S - AB) \times \sin. (\frac{1}{2} S - BC) =$
 $2 \sin. AB \sin. BC \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$, d'où, après avoir divisé
 par 2, on tire $\sin. AB \times \sin. BC : \sin. (\frac{1}{2} S - AB)$
 $\times \sin. (\frac{1}{2} S - BC) :: 1$ ou $r^2 : \sin.^2 \frac{1}{2} ABC$;
 ce qui donne, en employant les logarithmes, la
 règle qu'il s'agissoit de démontrer.



EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Du 11 Décembre 1765.

M.^{rs} DUHAMEL & D'ALEMBERT, qui avoient été nommés pour examiner *la troisième Partie du Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine*, par **M. BÉZOUT**, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 11 Décembre 1765.

Signé **GRANDJEAN DE FOUCHY**,

Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

De l'Imprimerie de **STOUBE**, rue de la Harpe.

1911





